

## مدل اصلاح شده کراندار در ارتباط با داده‌های منفی

رضا کاظمی متین<sup>۱\*</sup>، لیلا صالحی<sup>۲</sup>

۱- دانشیار گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج

۲- کارشناس ارشد، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج

رسید مقاله: ۱۶ اردیبهشت ۱۳۹۲

پذیرش مقاله: ۲۰ مهر ۱۳۹۲

### چکیده

در ادبیات تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، مدل‌های مختلفی جهت ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری با داده‌های منفی مطرح شده است. مدل اصلاح شده کراندار (BAM) از خانواده مدل‌های جمعی توسط کوپر و همکاران (۲۰۱۱) معرفی شد. این مدل در تمامی انواع بازده به مقیاس قابل اجراست و اندازه‌گیری کارایی با خواص مطلوب آرایه می‌دهد. در این مقاله ویژگی‌های این مدل را در حضور داده‌های منفی بررسی نموده، ارتباط ساختاری آن را با مدل‌های دیگر این زمینه نظیر RDM و MSBM نشان می‌دهیم. سپس نتایج هر سه مدل را در ارزیابی یک سیستم بانکداری شامل داده‌های منفی آرایه خواهیم داد.

**کلمات کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها، داده‌های منفی، مدل‌های جمعی، مدل کراندار، اندازه کارایی.

### ۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها، توسط فارل (۱۹۵۷) معرفی شد و توسط مقاله بنیادین چارنز و کوپر و ردز (۱۹۷۸) بسط و گسترش پیدا کرد [۱]، هدف آن ارزیابی عملکرد واحدهای تحت بررسی است که در آن ورودی‌ها و خروجی‌ها نامنفی در نظر گرفته شده‌اند [۲]، اما در مدل‌بندی مسائل کاربردی استفاده از اعداد منفی اجتناب‌ناپذیر است. به عنوان نمونه نرخ رشد اشتغال در یک کشور فاکتوری است که می‌تواند در بعضی موارد به خروجی شامل اعداد منفی در نظر گرفته شود. در به کارگیری داده‌های منفی در DEA دیدگاه‌های مختلفی مطرح شده است. پاستور (۱۹۹۴) و لوول (۱۹۹۵) و سیفورد (۲۰۰۲) به منظور برطرف کردن مقادیر منفی مقدار بسیار کوچک مثبت را به جای خروجی منفی به کار بردند. این رویکرد بر پایه این حقیقت استوار است که مدل‌های ارزیابی کارایی در DEA عملکرد هر DMU را با بهترین منبع ممکن نشان می‌دهد. بنابراین از متغیر خروجی با مقدار منفی یا مثبت خیلی کوچک انتظار نمی‌رود که در نرخ کارایی واحد تاثیر اساسی داشته باشند [۳]. پیشنهاد دیگر در این زمینه، در نظر گرفتن خروجی‌های منفی به عنوان ورودی و کاهش سطح آن‌ها است [۴]. اما این دو دیدگاه مطرح

\* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: rkmatin@kiauo.ac.ir

شده، نتایج متفاوتی تولید می‌کنند که ناشی از ضعف ساختاری آن‌ها است. از جمله مدل‌های کلاسیک در به-کارگیری داده‌های منفی هستند، مدل جمعی چارنز و همکاران (۱۹۸۵) [۴] تحت بازده به مقیاس متغیر است که به دلیل پایایی نسبت به انتقال که توسط علی و سیفورد (۱۹۹۰) [۵] مطرح شد، قادر است داده‌های منفی را با عدد به اندازه کافی بزرگ مثبت جمع کند و این داده‌ها را از سطح منفی به سطح مثبت منتقل کند بدون آن‌که نتایج حاصل از مدل تغییر یابند. هرچند مدل جمعی مستقیماً روی داده‌های منفی اجرا نمی‌شود اما می‌تواند به درستی کارایی پارتو کوپمن و ناکارایی ترکیبی واحدهای تحت بررسی را نشان دهد [۶].

مدل جمعی با دو ایراد بزرگ مواجه است [۴]:

- اندازه کارایی برای واحدهای تحت بررسی ارایه نمی‌دهد.
- نتایج حاصل از آن به واحد اندازه‌گیری کمیت‌ها وابسته است.

از دیدگاه توسعه نظری و کاربردی DEA در سال‌های اخیر محققین متعددی به موضوع (DEA) با داده‌های منفی پرداخته‌اند. شل (۲۰۰۱) پیشنهاد می‌کند که از مقادیر قدر مطلق خروجی‌های منفی به عنوان ورودی و قدر مطلق ورودی‌های منفی به عنوان خروجی استفاده شود [۷]. پرتلا و همکاران (۲۰۰۴) [۸] روش RDM را برای به‌کارگیری اعداد منفی معرفی کردند. شارپ و همکارانش (۲۰۰۶) [۹] مدل اصلاحی بر مبنای اندازه کارایی مبتنی بر متغیرهای کمکی موسوم به MSBM معرفی کردند. این مدل، اصلاح شده‌ی مدل بر پایه متغیر کمکی SBM است که توسط تن (۲۰۰۱) مطرح شده است [۱۰]. شارپ با اصلاح (SBM) این مدل را آماده پذیرش داده‌های منفی نمود.

جهت ارایه یک مدل جدید، در این مقاله مدل اصلاح شده کراندار BAM را که کوپر و همکارانش (۲۰۱۱) [۱۱] معرفی نمودند برای داده‌های منفی به کار می‌بریم. نشان می‌دهیم که در حضور داده‌های منفی این مدل هنوز اندازه کارایی با خواص قابل قبولی ارایه می‌دهد. سازگاری این مدل با تکنولوژی‌های با بازده به مقیاس ثابت و متغیر، از مزیت‌های این مدل به حساب می‌آید. مقایسه ساختاری بین اندازه کارایی این مدل با دو مدل MSBM و RDM ارایه خواهیم کرد. هم‌چنین این مدل را روی داده‌های بانک‌های کشورهای حاشیه خلیج فارس که شامل خروجی‌های با هر دو مقدار مثبت و منفی هستند اجرا نموده و به بررسی نتایج می‌پردازیم.

در این راستا، ادامه مطالب مقاله چنین تنظیم شده است. در بخش دوم مروری مختصر بر مدل‌های DEA با داده منفی خواهیم داشت. در بخش سوم به بررسی مدل BAM با داده منفی می‌پردازیم. در بخش چهارم به بررسی مثال عملی در ارتباط با داده بانک‌های حاشیه خلیج فارس خواهیم پرداخت بخش پنجم را به نتیجه‌گیری اختصاص می‌دهیم.

## ۲ مروری بر مدل‌های (DEA) با داده منفی

### ۲-۱ مدل RDM

سیلوا پرتلا و همکارانش در سال (۲۰۰۴) روش RDM را برای به کارگیری اعداد منفی به صورت زیر معرفی کردند. برای مجموعه‌ی واحدها فرض می‌کنیم یک نقطه آرمانی به صورت زیر داشته باشیم:

$$I = (Maxy_{rj}, r = 1, \dots, s, Minx_{ij}, i = 1, \dots, m) \quad (1)$$

نقطه آرمانی می‌تواند یکی از (DMU) ها باشد ولی در حالت کلی ممکن است این نقطه ایده‌آل درون مجموعه امکان تولید نباشد. بردارهای  $P_{ro}$  و  $P_{io}$  که به آن‌ها دامنه‌ی SP گویند میزان بهبود واحد تحت بررسی است و به صورت زیر معرفی می‌شود [۸]:

$$\begin{aligned} P_{ro} &= \max \{y_{rj}\} - y_{ro} & r &= 1, \dots, n \\ P_{io} &= x_{io} - \min \{x_{ij}\} & i &= 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2)$$

بر این اساس، مدل (RDM) به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} &Max \quad \beta \\ &s.t. \\ &X \lambda \leq x_o - \beta P_o^-, \\ &Y \lambda \geq y_o + \beta P_o^+, \\ &e \lambda = 1, \\ &\lambda, \beta, P_o^-, P_o^+ \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

این مدل نسبت به انتقال و تغییر واحد پایا است [۸]. با توجه به این ویژگی و این نکته که دامنه SP همواره نامنفی است، در مدل RDM می‌توان اعداد منفی را به کار برد. از آن‌جا که در جواب بهینه‌ی مدل یکی از قیود مساله مثل قید  $\lambda$  ورودی نافذ است، داریم  $\beta = \frac{(x_{io} - x_i^*)}{p_{io}}$  و اگر قید  $\lambda$  خروجی نافذ باشد داریم

$$\beta = \frac{(y_r^* - y_{ro})}{p_{ro}}$$

### ۲-۲ مدل MSBM

شارپ با قرار دادن جهت‌های بهبود معرفی شده، در مدل RDM،  $(p_{ro}^+, p_{io}^-)$  به جای خود مقادیر مشاهدات، در تابع هدف مدل SBM، تعدیلی را ایجاد نمود طوری که برای داده‌های منفی مناسب باشد. این مدل جدید به MSBM شناخته می‌شود [۹]:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad \rho &= \frac{1 - \sum_{i=1}^m \frac{w_i s_i^-}{p_{io}^-}}{1 + \sum_{r=1}^s \frac{v_r s_r^+}{p_{ro}^+}} \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^- = x_{io}, \quad i = 1, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n y_{ij} \lambda_j + s_r^+ = y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\
 & \sum_{i=1}^m w_i = 1, \quad \sum_{r=1}^s v_r = 1, \\
 & w_i, v_r, \lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{4}$$

که در آن  $w_i$  و  $v_r$  وزن‌هایی هستند که از قبل توسط تصمیم گیرنده (DM) معین می‌شوند. جایی که  $P_{io}^-$  و  $P_{ro}^+$  صفر هستند، فرض می‌کنیم عبارت  $\frac{w_i s_i^-}{P_{io}^-}$  و  $\frac{v_r s_r^+}{P_{ro}^+}$  از صورت و مخرج حذف می‌شوند. اندازه‌ی کارایی MSBM در محدوده‌ی  $[0, 1]$  قرار می‌گیرد [۹]. هم‌چنین مدل نسبت به انتقال پایاست [۱۲] و قابل اجرا برای داده‌های منفی.

### ۳ مدل BAM با داده منفی

کوپر و همکاران برای ایجاد یک اندازه‌ی جدید در حالت با داده‌های نامنفی، محدوده‌هایی با حد پایین برای ورودی‌ها و محدوده‌هایی با حد بالا برای خروجی‌ها در نظر می‌گیرد [۱۱]:

$$\begin{aligned}
 U_{ro}^+ &= \bar{y}_r - y_{ro}, & r &= 1, 2, \dots, s \\
 L_{io}^- &= x_{io} - \underline{x}_i, & i &= 1, 2, \dots, m
 \end{aligned} \tag{5}$$

همانطور که مشاهده می‌کنیم حد چپ برای هر ورودی تنها به کران پایین ورودی‌ها و ورودی واحدهای ارزیابی شده بستگی دارد. در حالی که حد راست برای هر خروجی فقط به کران بالایی خروجی‌ها و خروجی (DMU) مورد بررسی وابسته است، به همین دلیل کوپر و همکاران اندازه‌ی جدید را BAM، به معنای اندازه‌ی تعدیل شده‌ی کراندار نامیدند. در ضمن به واسطه مینیمم مقداری که در حداکثر تغییر متغیر کمکی ورودی و ماکزیمم مقداری که در حداکثر تغییر متغیر کمکی خروجی قرار دارد، مقدار  $L_{io}^-$  و  $U_{ro}^+$  در صورتی که داده‌ها منفی باشند همواره مثبت خواهد بود، بنابر این همواره بهبود در وضعیت ورودی‌ها و خروجی‌ها رخ خواهد داد.

اندازه‌ی ناکارایی BAM توسط مدل جمعی زیر ارزیابی می‌شود [۱۱]:

$$\begin{aligned}
 &Max \quad \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_{io}^-}{(m+s)L_{io}^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{ro}^+}{(m+s)U_{ro}^+} \right) \\
 &st. \\
 &\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_{io}^- = x_{io}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 &\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_{ro}^+ = y_{ro}, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\
 &\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 &\lambda_j \geq 0, \quad \forall j, \\
 &s_{io}^- \geq 0; s_{ro}^+ \geq 0 \quad \forall i, r.
 \end{aligned} \tag{۶}$$

و اندازه‌ی کارایی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma_{BAM} = 1 - \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_{io}^{-*}}{(m+s)L_{io}^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{ro}^{+*}}{(m+s)U_{ro}^+} \right) \tag{۷}$$

این اندازه خوش تعریف است هر گاه اگر برای هر واحد  $(x_o, y_o)$  در ورودی  $i$ ،  $x_i = x_{io}$  یعنی از کم‌ترین

ورودی استفاده شده است پس هیچ فضایی برای بهبود وجود نخواهد داشت به عبارت دیگر  $s_{io}^{-*} = 0$  و  $\frac{s_{io}^{-*}}{L_{io}^-} = 0$

و به‌طور مشابه اگر در خروجی  $r$  رابطه  $y_{ro} = \bar{y}_r$  برقرار باشد، می‌پذیریم  $\frac{s_{ro}^{+*}}{U_{ro}^+} = 0$ .

قضیه زیر خواص مطلوب اندازه کارایی BAM را در حضور داده‌های منفی مورد بازبینی قرار می‌دهد.

**قضیه ۱:** مدل BAM با داده‌های دلخواه (مثبت و منفی) دارای ویژگی زیر است:

$$0 \leq \Gamma_{BAM} \leq 1 \quad (P_1)$$

$$DMU_O \Leftrightarrow \Gamma_{BAM} = 1 \Leftrightarrow DMU_O \Leftrightarrow \Gamma_{BAM} = 0 \quad (P_2)$$

$$\Gamma_{BAM} \text{ دارای پایایی نسبت به تغییر واحد است.} \quad (P_3)$$

$$\Gamma_{BAM} \text{ یکنوا است.} \quad (P_4)$$

$$\Gamma_{BAM} \text{ دارای پایایی نسبت به انتقال است.} \quad (P_5)$$

**اثبات:** برای  $P_1$ :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq S_{io} = x_{io} - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} - \sum_{i=1}^n \lambda_j \underline{x}_i \\
 \sum_{i=1}^n \lambda_j &= 1 \\
 0 &\leq s_{io} \leq x_{io} - \underline{x}_i \Rightarrow 0 \leq s_{io} \leq L_{io} \\
 0 &\leq \frac{s_{io}^*}{L_{io}^-} \leq 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^m 0 \leq \sum_{i=1}^m \frac{s_{io}^*}{L_{io}^-} \leq \sum_{i=1}^m 1 \\
 0 &\leq \sum_{i=1}^m \frac{s_{io}^*}{L_{io}^-} \leq m
 \end{aligned} \tag{8}$$

با جمع روابط (۸) و (۹) داریم:

$$0 \leq \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_{io}^*}{L_{io}^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{ro}^{+*}}{U_{ro}^+} \right) \leq 1$$

برای  $P_7$ : فرض کنیم  $\Gamma_{BAM} = 1$ ، پس تمام متغیرهای کمبود و مازاد و برابر صفر هستند و اگر کارایی کامل باشد و دیگر هیچ جای بهبودی وجود نداشته باشد یعنی  $s_{io}^* = 0$  و  $s_{ro}^{+*} = 0$  در این صورت  $\Gamma_{BAM} = 1$  است. اگر  $\Gamma_{BAM} = 0$  باشد، یعنی  $s_{io}^*$  و  $s_{ro}^{+*}$  در ماکزیم مقدار خود قرار دارند و ناکارایی کامل است و اگر ناکارایی کامل باشد، یعنی:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq s_{io}^* \leq L_{io} \Rightarrow s_{io}^* = L_{io} \\
 0 &\leq s_{ro}^{+*} \leq U_{ro}^+ \Rightarrow s_{ro}^{+*} = U_{ro}^+
 \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= 1 - \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_{io}^*}{(m+s)L_{io}^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{ro}^{+*}}{(m+s)U_{ro}^+} \right) \\
 \Gamma &= 1 - \left( \frac{m}{m+s} + \frac{s}{m+s} \right) = 0
 \end{aligned}$$

در مورد  $P_8$ : فرض کنیم  $\beta_r > 1$ ,  $r = 1, \dots, s$ ,  $\alpha_i > 1$ ,  $i = 1, \dots, m$  جایگزینی‌های  $x_{ij} \rightarrow \alpha x_{ij}$  و  $y_{rj} \rightarrow \beta_r y_{rj}$  را داشته باشیم. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}
 L_i^- &= x_{io} - \underline{x}_i \rightarrow L_i^- \rightarrow \alpha_i L_i^- \\
 U_r^+ &= \bar{y}_r - y_{ro} \rightarrow U_r^+ \rightarrow \beta_r U_r^+ \\
 \Gamma_{BAM} &= 1 - \left( \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i s_{io}^*}{(m+s)\alpha_i L_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{\beta_r s_{ro}^{+*}}{(m+s)\beta_r U_r^+} \right)
 \end{aligned}$$

مقادیر مساوی از صورت و مخرج حذف می شوند. در نتیجه:  $\Gamma_{BAM}$  نسبت به تغییر واحد پایا است. برای  $P_4$ :  $(x, y)$  را یک واحد ناکارا در نظرمی گیریم و اولین ورودی آن را با یک کمیت مثبت افزایش می دهیم.  $(h > 0)$  نقطه ی جدید  $(x', y')$  ظاهر می شود. از آن جایی که نقطه ی جدید به روشنی از نقطه ی قبلی حاصل شده است مغلوب نقطه ی اولیه می باشد. می خواهیم ثابت کنیم  $\Gamma_{BAM}(x, y) \geq \Gamma_{BAM}(x', y')$  است و یا به طور معادل نشان می دهیم:

$$1 - \Gamma_{BAM}(x, y) \leq 1 - \Gamma_{BAM}(x', y') \quad (10)$$

در صورت موفقیت، با تکرار این عمل برای هر یک از ورودی های باقیمانده، افزایش هر یک با کمیتی مثبت و در مورد هر خروجی کاهش هر یک از آنها توسط یک کمیت مثبت، اثبات کامل خواهد شد. تصویر  $(x, y)$  با مقادیر کمکی بهینه  $(s_1^-, s_2^-, \dots, s_m^-, s_1^+, s_2^+, \dots, s_s^+)$  را در نظر می گیریم و نقطه ی جدید  $(x', y')$  را با مقادیر کمکی بهینه  $(s_1^- + h, s_2^-, \dots, s_m^-, s_1^+, s_2^+, \dots, s_s^+)$  مد نظر قرار می دهیم. باید ثابت کنیم:

$$1 - \Gamma_{BAM}(x, y) = \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{(m+s)L_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{(m+s)U_r^+} \leq 1 - \Gamma_{BAM}(x', y')$$

با جای گذاری داریم:

$$\sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{(m+s)L_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{(m+s)U_r^+} \leq \frac{s_1^+ + h}{(m+s)(L_1^- + h)} + \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{(m+s)L_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{(m+s)U_r^+}$$

$$s_1^- L_1^- + s_1^+ h \leq L_1^- s_1^- + L_1^- h$$

و پس از ساده سازی این نامعادله برقرار است اگر و فقط اگر  $\frac{s_1^+}{L_1^-} \leq 1$  که بدیهی است.

در مورد  $P_5$ : فرض کنیم  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$  و  $\beta_r > 0$ ,  $r = 1, \dots, s$  و جایگزینی های  $x_{ij} \rightarrow x_{ij} + \alpha_i$  و  $y_{rj} \rightarrow y_{rj} + \beta_r$  را داشته باشیم. در این صورت

$$\Gamma_{BAM} = 1 - \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{(m+s)L_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{(m+s)U_r^+} \right)$$

$$x_{io} - s_i^- = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \rightarrow x_{io} + \alpha_i - s_i^-$$

$$= \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + \alpha_i \sum_{j=1}^n \lambda_j$$

$$y_{ro} + s_r^+ = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \rightarrow y_{ro} + \beta_r + s_r^+$$

$$= \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} + \beta_r \sum_{j=1}^n \lambda_j$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$L_i^- = x_{io} + \alpha_i - \underline{x}_i - \alpha_i \quad \text{و} \quad U_r^+ = \bar{y}_r + \beta_r - y_{ro} - \beta_r$$

در این انتقال،  $S_i^{-*}$  و  $S_r^{+*}$  و  $L_i^-$  و  $U_r^+$  تغییر نمی کنند، پس مدل نسبت به انتقال پایا است. ■

مدل BAM نسبت به انتقال و تغییر واحد پایا است. بنا بر این مدل توانایی به کارگیری در با داده های منفی را داراست. هم چنین در حالتی که ورودی ها و خروجی ها هر کدام مقادیر مثبت و منفی را اختیار می کنند ویژگی های فوق در مدل BAM دستخوش تغییر نخواهد شد. در ادامه رابطه ای بین اندازه کارایی در مدل های BAM، RDM و MSBM را بیان می کنیم.

**قضیه ۲:** فرض کنیم اندازه کارایی مدل (MSBM) را بر  $\rho^*$ ، اندازه کارایی مدل (BAM) برابر  $\Gamma_{BAM}$  و اندازه کارایی مدل (RDM) برابر  $1 - \beta^*$  باشد. در این صورت داریم:

$$\rho^* \leq \Gamma_{BAM} \leq 1 - \beta^*$$

**اثبات:** ابتدا نشان می دهیم:  $\rho^* \leq \Gamma_{BAM}$ . لازم به ذکر است که:

$$p_{io}^- = L_{io}^- = x_{io} - \underline{x}_i$$

$$p_{ro}^+ = U_{ro}^+ = y_{ro} - \bar{y}$$
(۱۱)

در این بررسی تمامی وزن ها را برابر در نظر می گیریم. باید نشان دهیم:

$$\frac{1 - \sum_{i=1}^m \frac{w_i s_i^-}{L_{io}^-}}{1 + \sum_{r=1}^s \frac{v_r s_r^+}{U_{ro}^+}} \leq 1 - \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{L_{io}^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{U_{ro}^+} \right)$$

$$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{L_{io}^-} \leq 1 - \frac{1}{m+s} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{L_{io}^-} - \frac{1}{m+s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{U_{ro}^+} + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{U_{ro}^+} - \frac{1}{s(m+s)} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{U_{ro}^+} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{L_{io}^-} - \frac{1}{s(m+s)} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{U_{ro}^+} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{U_{ro}^+}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{L_{io}^-} \leq \left( 1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{U_{ro}^+} \right) \left( 1 - \frac{1}{m+s} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{L_{io}^-} - \frac{1}{m+s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{U_{ro}^+} \right)$$

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{L_{io}^-} + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{U_{ro}^+} \geq \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{L_{io}^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{U_{ro}^+} \right) - \frac{1}{s(m+s)} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{U_{ro}^+} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{L_{io}^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{U_{ro}^+} \right)$$

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{L_{io}^-} + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{U_{ro}^+} \geq \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{L_{io}^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{U_{ro}^+} \right) - \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{U_{ro}^+}$$

رابطه ی آخر همواره برقرار است.

حال نشان می دهیم:  $\Gamma_{BAM} \leq 1 - \beta^*$  در مدل (RDM)، مقدار متغیرهای کمکی را به صورت زیر می توان نوشت:

$$s^+ = \beta^* L_{ro}^+ + t^{+*}$$

$$s^- = \beta^* L_{io}^- + t^{+*}$$

در مدل (BAM) به جای  $s^+$  و  $s^-$  مقادیر مساوی را از رابطه‌ی (۱۱) قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \Gamma_{BAM} &= 1 - \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{\beta^* L_{io}^- + t^{+*}}{L_{io}^-} + \sum_{r=1}^s \frac{\beta^* L_{ro}^+ + t^{+*}}{U_{ro}^+} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \beta^* + \sum_{i=1}^m \frac{t^{+*}}{L_{io}^-} + \sum_{r=1}^s \beta^* + \sum_{r=1}^s \frac{t^{+*}}{L_{ro}^+} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{m+s} \left( (m+s) \beta^* + \sum_{i=1}^m \frac{t^{+*}}{L_{io}^-} + \sum_{r=1}^s \frac{t^{+*}}{L_{ro}^+} \right) \\ &= 1 - \beta^* - \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{t^{+*}}{L_{io}^-} + \sum_{r=1}^s \frac{t^{+*}}{L_{ro}^+} \right) \leq 1 - \beta^* \end{aligned}$$

بنابراین قضیه، مدل BAM از نظر تشخیص منابع ناکارایی جایگاهی میانی بین دو مدل دیگر خواهد داشت.

#### ۴ مثال کاربردی

برای توضیح نتایج اخیر، عملکرد مدل BAM را بر روی داده‌های مربوط به تعدادی از بانک‌های کشورهای حاشیه خلیج فارس پیاده کردیم. این مجموعه داده‌ها در مقاله‌ی کاظمی متین و عزیزی (۲۰۱۱) استفاده شده است [۱۳]. در این ارزیابی سه ورودی و دو خروجی در نظر گرفته شده است. خروجی‌ها در برخی موارد همزمان مقادیر مثبت و منفی را اختیار کرده‌اند. نتایج این بررسی در جدول (۱) قابل مشاهده است. این جدول نشان می‌دهد که مدل BAM در حضور اعداد منفی نیز عدد کارایی قابل قبولی را ارائه می‌دهد. جهت مقایسه اندازه کارایی این مدل را همراه با اندازه کارایی دو مدل RDM و MSBM در جدول قرار داده‌ایم. مشاهده می‌کنیم هر سه مدل در تشخیص واحدهای کارا و ناکارا یکسان عمل کرده‌اند. هم‌چنین اندازه کارایی مدل BAM را کوچک‌تر از اندازه کارایی مدل RDM و بزرگ‌تر از اندازه کارایی مدل MSBM نشان می‌دهد.

جدول ۱. اندازه کارایی مدل‌های BAM، MSBM و RDM برای داده‌های با مقادیر منفی

| شماره واحد | BAM   | MSBM  | RDM   | شماره واحد | BAM   | MSBM  | RDM   |
|------------|-------|-------|-------|------------|-------|-------|-------|
| ۱          | ۱     | ۱     | ۱     | ۳۰         | ۰/۷۷۷ | ۰/۳۳۷ | ۰/۹۹۳ |
| ۲          | ۰/۶۸۲ | ۰/۱۸۴ | ۰/۸۶۵ | ۳۱         | ۰/۸۰۳ | ۰/۴۲۳ | ۰/۹۷۰ |
| ۳          | ۱     | ۱     | ۱     | ۳۲         | ۰/۱۸۳ | ۰/۱۸۳ | ۰/۹۶۸ |
| ۴          | ۰/۰۶۵ | ۰/۱۶۴ | ۰/۸۷  | ۳۳         | ۰/۶۴۹ | ۰/۱۸۲ | ۰/۸۴۴ |
| ۵          | ۱     | ۱     | ۱     | ۳۴         | ۰/۲۳۸ | ۰/۲۰۸ | ۰/۹۷۵ |
| ۶          | ۰/۵۸۲ | ۰/۱۶۰ | ۰/۸۴  | ۳۵         | ۰/۷۵۴ | ۰/۲۳۱ | ۰/۸۶۹ |
| ۷          | ۱     | ۱     | ۱     | ۳۶         | ۰/۵۶  | ۰/۱۷۰ | ۰/۹۱۰ |

| شماره واحد | BAM    | MSBM  | RDM    | شماره واحد | BAM   | MSBM  | RDM   |
|------------|--------|-------|--------|------------|-------|-------|-------|
| ۸          | ۰/۴۸۵  | ۰/۱۶۱ | ۰/۹۳۱۸ | ۳۷         | ۰/۵۴۳ | ۰/۱۴۱ | ۰/۵۸۹ |
| ۹          | ۱      | ۱     | ۱      | ۳۸         | ۰/۷۰۹ | ۰/۲۴۳ | ۰/۹۸۷ |
| ۱۰         | ۰/۶۲۱  | ۰/۱۶۸ | ۰/۷۳۹  | ۳۹         | ۰/۷۲۲ | ۰/۲۳۵ | ۰/۹۸۹ |
| ۱۱         | ۰/۷۴۲  | ۰/۳۸۹ | ۰/۹۹۷  | ۴۰         | ۱     | ۱     | ۱     |
| ۱۲         | ۰/۳۱۹  | ۰/۱۷۵ | ۰/۹۸۷  | ۴۱         | ۰/۶۵۸ | ۰/۲۳۵ | ۰/۹۹۲ |
| ۱۳         | ۰/۵۷۴  | ۰/۱۶۸ | ۰/۹۵۳  | ۴۲         | ۱     | ۰/۱۹۴ | ۱     |
| ۱۴         | ۰/۱۸۳۱ | ۰/۳۶۰ | ۰/۹۹۷  | ۴۳         | ۰/۷۳  | ۰/۱۹۴ | ۰/۹۸۸ |
| ۱۵         | ۰/۸۷۹  | ۰/۲۴۱ | ۰/۹۸۸  | ۴۴         | ۱     | ۱     | ۱     |
| ۱۶         | ۰/۶۲۹  | ۰/۱۷۸ | ۰/۹۰۹  | ۴۵         | ۰/۷۲۲ | ۰/۲۰۵ | ۰/۹۷۷ |
| ۱۷         | ۰/۶۲۱  | ۰/۱۶۲ | ۰/۸۷۵  | ۴۶         | ۱     | ۱     | ۱     |
| ۱۸         | ۰/۳۵۵  | ۰/۱۸۱ | ۰/۸۸۶  | ۴۷         | ۱     | ۱     | ۱     |
| ۱۹         | ۰/۶۵۲  | ۰/۲۱۹ | ۰/۷۳۳  | ۴۸         | ۰/۶۵۸ | ۰/۱۷۹ | ۰/۸۴۷ |
| ۲۰         | ۰/۶۱۸  | ۰/۱۶۰ | ۰/۸۱۴  | ۴۹         | ۰/۵۷۴ | ۰/۱۳۷ | ۰/۴۴۱ |
| ۲۱         | ۰/۶۷۷  | ۰/۲۱۲ | ۰/۸۶۷  | ۵۰         | ۰/۶۲۸ | ۰/۱۷۸ | ۰/۵۸۹ |
| ۲۲         | ۰/۲۷۳  | ۰/۱۵۸ | ۰/۹۵۸  | ۵۱         | ۰/۶۵۵ | ۰/۲۲۳ | ۰/۸۲۳ |
| ۲۳         | ۰/۶۴   | ۰/۱۷۸ | ۰/۹۴۱  | ۵۲         | ۱     | ۰/۳۲۹ | ۰/۹۴۳ |
| ۲۴         | ۱      | ۱     | ۱      | ۵۳         | ۰/۶۳۳ | ۰/۱۸۵ | ۰/۸۴۷ |
| ۲۵         | ۰/۷۳۷  | ۰/۶۱۰ | ۰/۹۹۵  | ۵۴         | ۱     | ۱     | ۱     |
| ۲۶         | ۰/۶۶   | ۰/۱۷۵ | ۰/۹۷۱  | ۵۵         | ۰/۷۰۵ | ۰/۱۹۸ | ۰/۹۲۷ |
| ۲۷         | ۰/۶۶۳  | ۰/۲۰۲ | ۰/۸۴   | ۵۶         | ۱     | ۱     | ۱     |
| ۲۸         | ۰/۵۳۲  | ۰/۱۴۰ | ۰/۵۵۱  | ۵۷         | ۰/۰۰۹ | ۰/۱۶۵ | ۰/۹۵۱ |
| ۲۹         | ۰/۰۸۳  | ۰/۲۹۶ | ۰/۸۹۱  |            |       |       |       |

## ۵ نتیجه گیری

مدل BAM در جهت اصلاح مدل جمعی، توسط کوپر و همکاران (۲۰۱۱) معرفی شد. مزیت این مدل نسبت به مدل‌های دو مدل RDM و MSBM این است که در تکنولوژی با هر بازده به مقیاس چه ثابت و چه متغیر قابل اجراست. نشان دادیم این مدل با داده‌های منفی هم عدد کارایی قابل قبولی را ارائه می‌دهد و نیز ویژگی‌های مطلوب آن حفظ می‌شود. از نظر جایگاه تشخیص ناکارایی نشان داده شد که بین مدل‌های RDM و MSBM قرار می‌گیرد.

## منابع

- [1] Cooper, W. W., Seiford, L. M., Tone, K., (2007). Data Envelopment Analysis: a Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software. 2nd Edn. Springer, New York.
- [2] Cooper, W. W., Park, K. S., Pastor, J. T., (1999). RAM: A Range Adjusted Measure of Inefficiency for use with Additive Models and Relations to other Models and in DEA. Journal of Productivity Analysis, 11(1):5-42.

- [3] Pastor, J. T., Ruiz, J. L., (2005). On the Treatment of Negative Data in DEA. Working Paper, Centro de Investigacion Operativa, Universidad Miguel Hernandez, Spain.
- [4] Pastor, J. T., (1994). New Additive DEA Models for Handling Zero and Negative Data. Working Paper, Universidad de Alicante, Spain.
- [5] Ali, A.I., Seiford, L. M., (1990). Translation Invariance in Data Envelopment. Operations Research letters, 9, 403-405.
- [6] Charnes, A., Cooper, W. W., Golany, B., Seiford, L., Stutz, J., (1985). Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto- Koopmans Efficient Empirical Productions Function. Journal of Econometrics, 30, 91-107.
- [7] Scheel, H., (2001). Undesirable Outputs in Efficiency Evaluations. European Journal of Operational Research, 132:400-410.
- [8] Silva-Portela, M. C. A., Thanassoulis, E., Simpson, G., (2004). Negative Data in DEA: A Directional Distance Function Approach Applied to Bank Branches. Journal of Operations Research Society, 55:1111-1121.
- [9] Sharp, J. A., Meng, W., Liu, W., (2007). A Modified Slack-Based Measure Model for Data Envelopment Analysis with Natural Negative Outputs and Inputs. Journal of Operations Research Society, 58:1672-1677.
- [10] Ton, K., (2001). A slacks-Based Measure of Efficiency in Data Envelopment. European Journal of Operational Research, 130:498-509.
- [11] Cooper, W. W., Borras, F., Aparicio, J., Pastor, J. T., Pastor, D., (2011). BAM: A Bounded Adjusted Measure of Efficiency for use with Bounded Additive Models. Journal of Productivity Analysis, 35:85-9.
- [12] Cooper, W. W., Park, K. S., Pastor, J. T., (2001). The Response to the Comment by Steinmann and Zweifel. Journal of Productivity Analysis.
- [13] Kazemi Matin, R., Azizi, R., (2011). a Two-phase approach for setting targets in DEA with negative data. Applied Mathematical Modelling, 35(2011) 5794-5803.