مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال دهم، شماره چهارم (پیاپی ۳۹)، زمستان ۹۲، ص ص ۱۸-۱۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

تبدیل مدل غیرخطی شعاعی در حضور خروجی‌های نامطلوب، به مدل‌های خطی خروجی‌های غیراختیاری

محمدرضا علیرضائی[1]، محمد خیری چاری*[2]
۱- عضو هیات علمی دانشکده علوم، دانشگاه علم و صنعت
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه علم و صنعت

رسید مقاله: ۹ اردیبهشت ۱۳۹۲
پذیرش مقاله: ۱۸ شهریور ۱۳۹۲

چکیده
امروزه ارزیابی کارایی سازمان‌ها و دانستن این‌که سازمانی تا چه اندازه مفید می‌باشد برای آن سازمان و حتی سهام‌دارانش بسیار اهمیت دارد. یکی از روش‌های اندازه‌گیری کارایی، استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد. در ارزیابی به روش تحلیل پوششی داده‌ها هدف افزایش خروجی‌ها و کاهش ورودی‌ها و مقایسه بین واحدهای تحت بررسی است. در اغلب فرآیندها به همراه تولید خروجی‌ها، خروجی‌هایی تولید می‌شوند که افزایش آن‌ها نه تنها سودآور نیست؛ بلکه باعث زیان نیز می‌شود. به همین خاطر مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها می‌بایست طوری ارایه می‌شدند که میزان تأثیر این نوع خروجی-ها را در کارایی و رتبه‌بندی با خود داشته باشند. در این مقاله ابتدا مدل شعاعی غیرخطی فار ارایه‌شده، سپس با استفاده از تبدیلات ریاضی نشان داده‌شده که می‌توان آن مدل را به یک مدل با خروجی‌های غیرقابل‌کنترل خطی، تبدیل نمود.

کلمات کلیدی: خروجی‌های نامطلوب، خروجی‌های غیر اختیاری، اصل دسترسی‌پذیر، مدل فار.

۱ مقدمه
بشر از ابتدا به دنبال سود بیشتر در کارهایش بود لذا هیچ‌گاه به دنبال کم کردن ورودی عملیات خود نبوده است. ولی در گذر زمان سازمان‌های مختلف کارهای مشابه هم انجام می‌دادند لذا هر سازمان برای سودآوری بیشتر و ایجاد رفاه در جامعه، هم‌چنین باقی ماندن در فضای رقابت به دنبال کم کردن ورودی و افزایش خروجی‌ها بودند. با گذشت زمان، روش‌های اندازه‌گیری بهره‌وری به وجود آمد. در روش‌های اولیه با استفاده از نسبت خروجی‌ها بر روی ورودی‌ها میزان کارایی و بهره‌وری را اندازه‌گیری می‌کردند اما در این نوع روش‌ها نیازمند شاخص‌های عددی از قبل برای هر ورودی و خروجی در نظر گرفته‌شده، سپس با استفاده از شاخص‌های عددی و روش‌های رگرسیون آماری به محاسبه کارایی و بهره‌وری می‌پرداختند. در ادامه این پیشرفت‌ها روش‌های جدیدی برای محاسبه دو شاخص کارایی و بهره‌وری ابداع شد که یکی از این روش‌ها، روش‌های تحلیل پوششی داده‌ها

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس پست الکترونیکی: kheirichari@mathdep.iust.ac.ir

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

می‌باشد. DEA (Data Envelopment Analysis) از مدل‌های ریاضی برای محاسبه شاخص‌های عددی استفاده نموده؛ سپس با استفاده از شاخص‌های به دست آمده دو شاخص کارایی و بهره‌وری را محاسبه می‌نماید [۱]. در مدل‌های DEA هدف کاهش ورودی و افزایش خروجی و در نتیجه افزایش کارایی می‌باشد. معمولاً در هر فرآیند تولیدی، مسایل و محدودیت‌هایی وجود دارد که سازمان یا نهاد مورد نظر به خاطر سودآوری و یا صرفه‌جویی بیشتر در وقت، آن‌ها را در نظر نمی‌گیرند. برای مثال می‌توان به خروجی‌های بدی که به همراه خروجی‌های خوب سازمان به وجود می‌آیند، اشاره نمود. می‌دانیم که این نوع خروجی‌ها باید در محاسبه میزان کارایی و بهره‌وری هر سازمان با نهاده تأثیرگذار باشد لذا باید مدل‌هایی ارایه شود که علی‌رغم کاهش ورودی و افزایش خروجی، خروجی‌های نامطلوب را کاهش دهد [۱].

در بخش بعدی به پیشینه مقالات و کارهایی که در زمینه خروجی‌های نامطلوب می‌پردازیم. بخش سه شامل اصول و تعاریف لازم، برای درک بهتر شما از این مقاله، به همراه چند مثال ساده می‌باشد. در بخش چهار به ارایه مدل غیرخطی فار پرداخته، سپس چگونگی تبدیل آن را به مدل خطی با خروجی غیراختیاری شرح می‌دهیم. در بخش پنج نتایج مورد نظر خود را در چند بند بیان می‌کنیم و در انتها منابع استفاده‌شده را برای تهیه این مقاله مورد بازدید قرار می‌دهیم.

۲ ادبیات مرور

در زمینه خروجی‌های نامطلوب ابتدا کپمن در سال ۱۹۵۱ مدلی را برای برخورد با خروجی‌های نامطلوب ارایه داد که همان مدل جمعی می‌باشد. او با در نظر گرفتن علامت منفی برای خروجی‌های نامطلوب مدل خود را ارایه نمود [۲]. سپس پیتمن با استفاده از «قیمت‌های سایه» به توجیه هزینه‌ی اقتصادی خروجی‌های نامطلوب پرداخت. او در این مقاله از مدل‌های پارامتریک و هم‌چنین قضیه دوگانی استفاده کرده است [۳]. بعد از آن داگلاس در سال ۱۹۸۲ و هم‌چنین فار و گالونی در سال ۱۹۸۹ مقالاتی در مورد روش‌های برخورد با خروجی‌های نامطلوب ارایه نمودند. در همان سال چند ماه بعد از مقاله فار و گالونی، فار و همکاران مقاله‌ای در جهت بهبود خروجی‌های مطلوب و کاهش خروجی‌های نامطلوب و ورودی‌ها با یک رویکرد ناپارامتریک، ارایه نمودند [۴]. پس از مقاله‌ی فار و همکاران دانشمندانی هم‌چون سیفورد و الی ۱۹۹۰، فار و چونگ ۱۹۹۵، سیفورد و الی ۲۰۰۱، پاستور ۲۰۰۱، لوول، اسچیل ۲۰۰۰، در گسترش روش‌های برخورد با خروجی‌های نامطلوب و برگرفته از این مقاله ارایه داده‌اند [۵]. شاید بتوان گفت مقاله‌ی فار و همکاران شالوده و باعث ایجاد شاخه‌های متعدد در نحوه‌ی برخورد با خروجی‌های نامطلوب شده است.

۳ پیش‌نیازها

هر سازمان با توجه به منابع و سرمایه و نیروی کاری که دارد می‌تواند ترکیب‌های مختلف از خروجی‌ها را تولید کند که به مجموعه این ترکیب‌ها مجموعه امکان تولید گفته می‌شود که آن را با PPS (Production Possibility Set) نشان می‌دهیم. واضح است اگر مجموعه امکان تولید را داشته باشیم طبق فرآیندی ساده مرز آن را محاسبه؛

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

تابع تولید را تخمین می‌زنیم و اگر هم تابع تولید را داشته باشیم با استفاده از تابع و این‌که تمام جهت‌هایی که کمتر از تابع تولید هستند می‌توانند رخ دهند به راحتی می‌توان مجموعه امکان تولید را محاسبه نمود. با توجه به پنج اصل اصول موضوعه مجموعه امکان تولید به صورت زیر می‌باشد [۱]:

$$PPS=\left\{\begin{matrix}(X,Y):Y\le\lambda Y^{o},\\ \lambda X\le X_{o}\quad \lambda\in R_{+}^{n}\end{matrix}\right\} \qquad (۱)$$

در این مقاله نیز رشد تمام واحدهای تصمیم‌گیری را به صورت DMU (Decision-Making Units) نوشته‌ایم. هم‌چنین در تمام این مقاله فرض کنید $j=۱،...،n$ تعدادDMU ها و $i=۱،...،m$ تعداد ورودی‌های هر DMU و $r=۱،...،s$ تعداد خروجی‌های هر DMU باشد. لذا برای ماتریس ورودی‌ها و ماتریس خروجی به ترتیب خواهیم داشت:

$$X=\begin{bmatrix}x_{۱۱} & \cdots & x_{۱n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{m۱} & \cdots & x_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}\qquad Y=\begin{bmatrix}y_{۱۱} & \cdots & y_{۱n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{s۱} & \cdots & x_{sn}\end{bmatrix}_{s\times n} \qquad (۲)$$

۳-۱ خروجی نامطلوب

خروجی‌هایی بدی هستند که به همراه خروجی‌های اصلی (خوب) تولید می‌شوند و معمولاً بنا بر ماهیتی که دارند به دست آوردن قیمت آن‌ها در بازار کار آسانی نیست لذا برای محاسبه قیمت، از نظر کارشناسان خبره بهره می‌گیرند یا اغلب به وسیله‌ی قیمت‌های سایه استفاده می‌کنند. برای مثال فرض کنیم بخواهیم کاغذ تولید کنیم. خروجی‌هایی مانند اکسیژن بیوشیمیایی، جامدات معلق، اکسیدهای گوگرد و ذرات، همگی به همراه کاغذ تولید می‌شوند [۴] که محاسبه قیمت این خروجی‌ها در باز امکان‌پذیر نیست. البته منظور از قیمت، شامل هزینه‌های که ما مجبوریم به خاطر تولید این نوع خروجی‌ها بپردازیم؛ می‌باشد.

در این مقاله خروجی‌های مطلوب را با Y^{D} و خروجی‌های نامطلوب را با Y^{U} نشان می‌دهیم. هم‌چنین در تمام این مقاله فرض بر این است که $j=۱،...،n$ تعدادDMUها و $i=۱،...،m$ تعداد ورودی‌های هر DMU و $r=۱،...،s$ تعداد خروجی‌های هر DMU می‌باشد.

۳-۲ اصل دسترس‌پذیر ضعیف (Weak disposability)

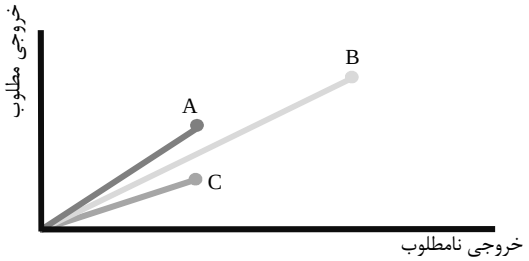
در هر فرآیند به همراه خروجی‌های مطلوب خروجی‌های نامطلوب هم به وجود می‌آید. این اصل بیان می‌دارد که نمی‌توانیم مقدار خروجی‌های نامطلوب را به صفر برسانیم درحالی‌که خروجی مطلوب با مقدار مثبت داشته باشیم. برای مثال تولید کاغذ، بدون خروجی‌های نامطلوب مانند گوگرد و... امکان‌پذیر نیست [۴].

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

به عبارت دیگر این اصل نشان می‌دهد که کاهش نسبتی از خروجی‌های مطلوب، به همان نسبت خروجی‌های نامطلوب را کاهش می‌دهد [۶]، یعنی:

$$(Y^{D},Y^{U})\in PPS \Rightarrow \forall \circ \le \theta \le 1 \quad (\theta Y^{D},\theta Y^{U})\in PPS \qquad (۳)$$

این اصل برای زمانی برقرار است که سازمان‌های تحت بررسی، به کم کردن تولید خروجی‌های نامطلوب اهمیت بدهند و یا این‌که بر اساس قوانین حاکم بر آن سازمان‌ها باید خروجی‌های نامطلوب را کاهش دهند. به راحتی از توضیح بالا می‌توان نتیجه گرفت $(Y^{D}, Y^{U}) = (\circ,\circ)$ یک عضو از PPS می‌باشد؛ در حالتی که یک خروجی مطلوب و یک خروجی نامطلوب داریم می‌توان گفت که خط واصل از هر DMU به مبدأ همگی در PPS می‌باشند. فرض کنید که سه DMU داریم لذا شکل ۱ بیانگر اصل بالا می‌باشد.



شکل ۰. میزان تاثیر اصل دسترسی‌پذیر ضعیف بر فضای امکان تولید سه واحد A,B,C

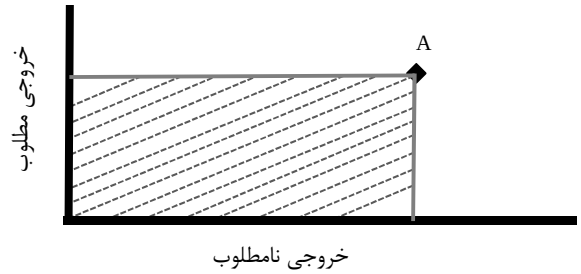
۳-۳ اصل دسترسی‌پذیر قوی (Strong disposability)

این اصل بیان می‌کند که ممکن است افزایش خروجی‌های مطلوب داشته باشیم درحالی‌که خروجی‌های نامطلوب صفر باشد. این اصل فقط به افزایش خروجی‌های مطلوب اهمیت می‌دهد و به طور جدی به میزان تولید خروجی نامطلوب نگاه نمی‌کند [۴] یعنی:

$$(Y^{'D},Y^{'U})\le (Y^{D},Y^{U})\in PPS \Rightarrow (Y^{'D},Y^{'U})\in PPS \qquad (۴)$$

برخلاف دسترسی ضعیف این قید برای زمانی است که اجباری برای کم کردن خروجی‌های نامطلوب نداشته باشیم اما در قیود مدل این شرط را قرار می‌دهیم.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]



شکل ۲. میزان تاثیر اصل دسترسی‌پذیر قوی بر فضای امکان تولید واحد A

۳-٤ مجموعه امکان تولید PPS

با توجه به پذیرش اصول موضوعه، به همراه از اصول دسترسی‌پذیر ضعیف PPS را به صورت زیر خواهیم داشت [۴]:

$$PPS = \begin{Bmatrix} (Y^D, Y^U) : Y^{Do} \le \lambda Y^D, Y^{Uo} = \lambda Y^U \\ \lambda X \le X_o \quad \lambda \in R_+^n \end{Bmatrix} \tag{۵}$$

و به همراه اصل دسترسی‌پذیری قوی:

$$PPS = \begin{Bmatrix} (Y^{\,D}, Y^{\,U}) : Y^{\,Do} \le \lambda Y^{\,D}, Y^{\,Uo} \le \lambda Y^{\,U} \\ \lambda X \le X_o \quad \lambda \in R_+^n \end{Bmatrix} \tag{۶}$$

۳-۵ خروجی‌های غیر اختیاری (Non-discretionary output)

خروجی‌های غیر اختیاری یا خروجی‌های غیرقابل‌کنترل، خروجی‌هایی هستند که کنترل آن‌ها به دست واحد تحت بررسی نمی‌باشد، برای مثال فرض کنید واحد تحت بررسی کتابخانه عمومی باشد. در این صورت اگر تعداد کسانی را که در یک روز به کتابخانه عمومی سطح شهر برای دریافت کتاب مراجعه می‌نمایند؛ به عنوان خروجی در نظر بگیریم؛ چون نمی‌توانیم این جمعیت را کنترل کنیم لذا یک خروجی غیر اختیاری است [۷].

$$\begin{aligned} &Max \quad \varphi \\ &s.t. \\ &\quad \varphi Y^{\,Ck} \le \lambda Y^{\,C}, \\ &\quad Y^{\,UCk} \le \lambda Y^{\,UC}, \\ &\quad \lambda X \le X_k, \\ &\quad \lambda \in R_+^n. \end{aligned} \tag{۷}$$

٤ مدل فار و چگونگی تبدیل به یک مدل خطی

می‌دانیم مدل‌های DEA بدون حضور خروجی‌های نامطلوب شامل گستردگی بسیار زیادی است اما اساس این نوع مدل‌ها مبتنی بر مدل CCR (Charnes, Cooper, Rhodes) می‌باشد. اگر مدل خروجی‌محور را در نظر بگیرم به صورت زیر است [۸]:

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \varphi \\
&s.t. \\
&\qquad \varphi Y^{k} \le \lambda Y, \\
&\qquad \lambda X \le \varphi^{-1} X_{k}, \\
&\qquad \lambda \in R_{+}^{n}.
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

همان طور که مشاهده می‌شود خروجی‌های نامطلوب هیچ تاثیری در مدل (۸) ندارند.

اما در حالت کلی با حضور خروجی‌های نامطلوب نحوه برخورد با این نوع خروجی‌ها را می‌توان به ۵ بخش زیر تقسیم نمود [۹]:

۱- چشم‌پوشی کردن از خروجی نامطلوب.

۲- استفاده از روش غیرخطی فار.

۳- استفاده خروجی نامطلوب به عنوان خروجی و محدود کردن آن‌ها.

۴- خروجی نامطلوب را به عنوان ورودی.

۵- کاربرد انتقال یکنواخت کاهشی برای مثال $1/Y^{b}$.

در مدل‌هایی که خروجی‌های نامطلوب را در نظر می‌گرفتند. فار و همکاران با استفاده از مدل پایه‌ای DEA-CCR، یک رویکرد ناپارامتریک و با توجه به اصول دسترسی‌پذیر چند مدل برای کاهش خروجی‌های نامطلوب و افزایش خروجی‌های مطلوب ارایه دادند. در مقاله آن‌ها پنج مدل ارایه شد که یکی از آن‌ها بر اساس کاهش خروجی‌های نامطلوب و ورودی‌ها و همزمان افزایش خروجی‌های مطلوب می‌باشد. این مدل با اصل دسترسی‌پذیر قوی به صورت زیر نمایش داده می‌شود [۴]:

$$
\begin{aligned}
&H_{P}^{C}(Y^{Dk}, Y^{Uk}, X^{k}) = Max \ \varphi \\
&s.t. \\
&\qquad \varphi Y^{Dk} \le \lambda Y^{D}, \\
&\qquad \varphi^{-1} Y^{Uk} \le \lambda Y^{U}, \\
&\qquad \lambda X \le \varphi^{-1} X_{k}, \\
&\qquad \lambda \in R_{+}^{n}.
\end{aligned}
\tag{۹}
$$

با قرار دادن تساوی در قید دوم مدل ۹، می‌توان آن را مدلی با پذیرش اصل دسترسی‌پذیر ضعیف تبدیل نمود. در فصل۴ بخش ۲ از کتاب ری مبحثی مبنی بر اندازه گراف هذلولی‌گون کارایی ارایه شده است. در این بخش مدلی با استفاده از کاهش همزمان ورودی‌ها و افزایش همزمان خروجی‌ها میزان تغییرات لازم برای رسیدن به نقطه‌ای بهین را محاسبه می‌نماید که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \varphi \\
&s.t. \\
&\qquad \varphi Y^{Dk} \le \lambda Y^{D}, \\
&\qquad \lambda X \le \varphi^{-1} X_{k}, \\
&\qquad \lambda \in R_{+}^{n}.
\end{aligned}
\tag{۱۰}
$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

برای خطی نمودن مدل (۱۰) از تغییر متغیر $\mu=\varphi\lambda$ و $\delta=\varphi^{۲}$ استفاده نموده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌کنید مدل (۹) یک مدل غیرخطی است. همانند مدل (۱۰) با استفاده از تغییر متغیر $\mu=\varphi\lambda$ و $\delta=\varphi^{۲}$ مدل (۹) به مدل زیر تبدیل خواهد شد [۱۰]:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \delta \\
&s.t. \\
&\quad \delta Y^{Dk} \le \mu Y^{D}, \\
&\quad Y^{Uk} \le \mu Y^{U}, \\
&\quad \mu X \le X_k, \\
&\quad \mu \in R_+^n.
\end{aligned}
\qquad (۱۱)
$$

که با توجه به ساختار مدل (۱۱) به راحتی می‌توان دید مدل (۹) به یک مدل خطی در حضور خروجی‌های غیر اختیاری تبدیل شده است. نشان دادیم مدل شعاعی فار را می‌توان به صورت یک مدل خطی درآورده؛ سپس مقدار آن را محاسبه نمود.

برای درک بهتر داده‌های جدول ۱ را در نظر گرفته؛ با استفاده از دو مدل بالا مقدار بهینه برای هر واحد محاسبه، سپس مقادیر به دست آمده را در جدول ۲ نمایش. لازم به ذکر است داده‌های جدول یک مربوط به هیچ سازمان و محیطی نمی‌باشد.

جدول ۱. داده‌ها

	واحد۱	واحد۲	واحد۳	واحد٤	واحد٥	واحد٦	واحد۷	واحد۸	واحد۹	واحد۱۰	واحد۱۱	واحد۱۲
X_1	۲۰	۱۹	۲۵	۲۷	۲۲	۵۵	۳۳	۳۱	۳۰	۵۰	۵۳	۳۸
X_2	۱۵۱	۱۳۱	۱۶۰	۱۶۸	۱۵۸	۲۵۵	۲۳۵	۲۰۶	۲۴۴	۲۶۸	۳۰۶	۲۸۴
Y_1^D	۱۰۰	۱۵۰	۱۶۰	۱۸۰	۹۴	۲۳۰	۲۲۰	۱۵۲	۱۹۰	۲۵۰	۲۶۰	۲۵۰
Y_2^D	۹۰	۵۰	۵۵	۷۲	۶۶	۹۰	۸۸	۸۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۴۷	۱۲۰
Y_1^U	۳	۶	۵	۴	۸	۹	۷	۵	۹	۱۰	۵	۹
Y_2^U	۲	۱	۴	۵	۲	۶	۷	۵	۴	۶	۸	۲

جدول ۲.نتایج حاصل از اجرای دو مدل

	واحد۱	واحد۲	واحد۳	واحد٤	واحد٥	واحد٦	واحد۷	واحد۸	واحد۹	واحد۱۰	واحد۱۱	واحد۱۲
۹	۱	۱	۱/۰۱۳۰۶	۱	۱	۱/۰۳۱۹۷	۱	۱/۱۰۳۱۴	۱	۱	۱	۱/۰۲۱۵
۱۰	۱	۱	۱/۰۱۳۰۶	۱	۱	۱/۰۳۱۹۷	۱	۱/۱۰۳۱۴	۱	۱	۱	۱/۰۲۱۵

همان طور که می‌بینید مقادیر به دست آمده یکسان می‌باشند. البته مدل (۹) به خاطر غیرخطی بودن برای جامعه تحت بررسی پرجمعیت دارای خطای محاسبه است ولی مدل (۱۱) این ضعف را ندارد.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

۵ نتایج

در این مقاله نشان داده شد که می‌توان مدل غیرخطی فار را به مدل خطی تبدیل نمود. از نتایج این کار می‌توان به نکات زیر اشاره نمود:

مدت زمان محاسبه جواب در روش‌های خطی، بسیار کمتر از روش‌های غیرخطی است. هم‌چنین روش‌های غیرخطی به خاطر خطای بالای محاسبات قابل‌اعتماد نمی‌باشند ولی روش خطی این مشکل را ندارد. با استفاده از این تبدیل می‌توان دریافت که معکوس مقدار بهین مدل خطی (۷)، با مدل‌های غیرخطی هذلولی در حضور خروجی‌های نامطلوب، با در نظر گرفتن خروجی‌های نامطلوب به عنوان خروجی‌های غیر اختیاری رابطه‌ی مجذور بودن در مقدار بهین دارد. فرض کنید مقدار خطا در محاسبه φ^{-1} عدد ε باشد لذا در مدل فار برای حل برای هر DMU حداقل به تعداد خروجی‌های نامطلوب این تقریب را استفاده می‌کند که باعث انتشار خطا می‌شود اما در مدل خطی با حضور خروجی‌های نامطلوب انتشار خطا رخ نمی‌دهد.

منابع

[1] Cooper, W., Seiford, L. M., Tone, K., (2007). Data Envelopment Analysis A Comprehensive Text with Models Applications References and DEA Solver Software, 2nd ed, section 7, 219-223.

[2] Koopmans, T. C., (1951). Analysis of production as an efficient combination of activities In T. C. Koop-mans. Activity analysis of production and allocation, Cowles Commission, 33–97.

[3] Pittman, R. W., (1983). Multilateral Productivity Comparisons with Undesirable Outputs. Economic Journal, 93: 883-891.

[4] Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C. A. K., Pasurka, C., (1989). Multilateral Productivity Comparisons When Some Outputs Are Undesirable: A Nonparametric Approach. JSTOR Registered author(s), The Review of Economics and Statistics, 71, 90–98.

[5] Liu, W. B., Meng, W., Li, X. X., Zhang, D. Q., (2009). DEA models with undesirable inputs and outputs, Springer, 173: 177–194.

[6] Shephard, R. W., (1970). Theory of Cost and Production, Princeton: Princeton University Press

[7] Mikko, J. Syrjanen, (2004). Non-discretionary and discretionary factors and scale in data envelopment analysis. European journal of operational research 158: 20-33.

[8] Chames, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the Efficiency of Decision Making Units. European journal of operational research. 2, 429-444

[9] Lawrence, M., Seiford, J. Z., (2001). Modeling undesirable factors in efficiency evaluation. European Journal of Operational Research, 142, 16–20.

[10] Ray, S. C., (2006). Data Envelopment Analysis Theory and Techniques for Economics and Operations Research. 2nd ed., Ed. Cambridge, section 4, 82-88.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]