مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال بیست و دوم، شماره اول (پیاپی ۸۴)،بهار ۰۴، ص ص ۱۲۳-۱۰۷
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

ارایه یک مدل چندگروهی و کنترل بهینه یک بیماری عفونی در ایران

نجمه داوریان[۱]، عقیله حیدری[۲*]، سید حامد هاشمی مهنه[۳]، علی اکبر حیدری[۴]

۱- دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

۲- استاد، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

۳-دانشیار، پژوهشگاه هوا و فضا، تهران، ایران

۴- استاد، گروه بیماری‌های عفونی و گرمسیری، دانشگاه علوم پزشکی، مشهد، ایران

رسید مقاله: ۳ شهریور ۱۴۰۳

پذیرش مقاله: ۲۸ دی ۱۴۰۳

چکیده

این مقاله، شامل یک مدل بیماری کووید ۱۹ می‌باشد که ابتدا آن را به یک مدل چند گروهی تبدیل کرده‌ایم. کل جمعیت هر گروه به چهار بخش تقسیم می‌شود که شامل افراد مستعد، افراد آلوده بدون علامت، افراد آلوده علامت‌دار و افراد بهبود یافته می‌باشد. سپس به تجزیه و تحلیل و پایداری نقطه تعادل عاری از بیماری و عدد تکثیر پرداخته‌ایم. از آن جایی که بیشتر بیماری‌های عفونی را می‌توان به تدریج از بین برد، به شرط آن که گام‌های کافی و به موقع در سیر همه‌گیری آن برداشته شود، از این رو، به منظور از بین بردن بیماری در برخی گروه‌ها در یک منطقه، کنترل‌های مناسبی طراحی کرده‌ایم که باعث کاهش تعداد افراد آلوده بدون علامت و افراد آلوده علامتدار خواهد شد. در نهایت، از داده های تقریباً واقعی استان‌های اصفهان، خراسان رضوی و فارس برای نشان دادن اثربخشی این نتایج به‌دست آمده، استفاده کرده‌ایم.

کلمات کلیدی: چند گروهی، پایداری، نقطه تعادل، کنترل بهینه، کووید۱۹.

۱ مقدمه

در سال ۲۰۱۹ نوع جدیدی از ویروس کرونا برای اولین بار در استان هوبی چین گزارش شد. طی چند ماه، این ویروس جدید قادر به ایجاد همه گیری جهانی بیماری کرونا ویروس (COVID-19) شد. سازمان بهداشت جهانی، همه گیری COVID-19 را به عنوان یک فوریت بهداشت عمومی با نگرانی بین المللی اعلام کرد [۱]. ویروس کرونا از روش‌های مختلفی مانند عطسه، سرفه و صحبت با فرد آلوده، منتقل می‌شود. در این زمینه تحقیقات زیادی انجام شده است که آیا انتقال ویروس می‌تواند از طریق تماس با سطوح آلوده نیز انجام شود [۲]. گسترش شیوع این ویروس، مشکلات اجتماعی، اقتصادی و بهداشتی زیادی را در جهان ایجاد کرد و چندین

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: a_heidari@pnu.ac.ir

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/JAMLU-2025-1-2274]

میلیون نفر در دنیا به این ویروس مبتلا شدند و یا جان خود را از دست دادند. از این رو، محققان در پی ساختن واکسنی برای این ویروس بودند [۳،۴].

ایران نیز در ۱۹ فوریه ۲۰۲۰ (۳۰ بهمن ۱۳۹۸)، اولین مورد تاییدشده کووید ۱۹ در قم را گزارش داد و دولت ایران، تمام مدارس، دانشگاه‌ها، مراکز خرید و بازارها را تعطیل اعلام کرد. پیش از عید نوروز، علی‌رغم قصد دولت برای محدود کردن سفرها، ترافیک سنگین بین شهرها ادامه داشت. دولت بعداً اعلام کرد که ممنوعیت سفر بین شهرها، افزایش تعداد مبتلایان را در پی داشته است. دولت از ماه اوریل (۱۴ فروردین) به تدریج محدودیت‌ها را کاهش داد و تعداد مبتلایان در ماه مه (اردیبهشت) به پایین‌ترین حد خود رسید ولی با کاهش محدودیت‌ها، موج جدید در ۴ ژوئن (۱۵ خرداد ۱۳۹۹) گزارش شد و تعداد مرگ و میرها افزایش یافت [۵].

از این رو مدل‌سازی ریاضی بیماری‌های عفونی، امری ضروری است و ابزاری برای فهم پویایی و شیوع بیماری می‌باشد. همچنین برای سیاست‌گذاران در تصمیم‌گیری به موقع برای کاهش و کنترل بیماری‌ها بسیار کمک‌کننده است. از طرفی مدل اپیدمی چند گروهی، علاقه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است به دلیل اینکه انتقال بسیاری از بیماری‌های عفونی مانند اوریون، ایدز، سرخک و ... را در زمینه‌های مختلف می‌توان مدل‌سازی کرد. در واقع، گروه می‌تواند یک جامعه، شهر و یا یک کشور را توصیف کند [۶،۷].

برای گسترش کووید ۱۹ در مناطق مختلف جهان، چندین مدل پیشنهاد شده است. به عنوان مثال، مایر و براکمن، تاثیر کنترل موثر در شیوع بیماری در چین را مورد مطالعه قرار دادند [۸]. مدلی که محسن و همکاران پیشنهاد کردند، اثرات موثر پوشش رسانه را در برداشت [۹]. خوشناو و همکاران، پیشنهاد کردند که باید توجه بیشتری به مراقبت‌های بهداشتی و قرنطینه کردن افراد داشته باشند [۱۰].

از آن جایی که این بیماری جهش و سویه‌های مختلف زیادی داشت و بسیاری از علائم و نشانه‌های آن، در بسیاری از مواقع ناشناخته بود، بنابراین بعضی از این مدل‌ها، با شکست مواجه می‌شد. مانند مدل دهار، که از یک مدل اصلاح شده‌ی SIR استفاده کرد و شامل افراد عفونی بدون علائم بیماری و افراد با علائم عفونی و نیز شامل یک تابع قرنطینه‌ی وابسته به زمان بود. او پیش‌بینی کرد جمعیت آلوده در ۶۰ روز قرنطینه باید کمتر از ۲۰۰ نفر باشد ولی با گذشت چند روز، مدل او، با نتایج متناقض بود [۱۱]. مدل تیواری نیز که یک مدل اصلاح شده‌ی SIR و شامل افراد در قرنطینه بود نیز با شکست مواجه شد. زیرا مقادیری که پیش‌بینی شده بود، در مقایسه با داده‌های واقعی خیلی کم بود [۱۲]. سردار از مدل اصلاح شده‌ی SEIR استفاده کرد که شامل افراد بدون علامت، افراد بستری در بیمارستان و افراد در قرنطینه بود. ولی طبق نتایج نهایی که به‌دست آمد، تفاوت زیادی در داده‌های پیش‌بینی شده و داده‌های واقعی وجود داشت [۱۳].

از طرفی اکثر مدل‌های بیماری کووید ۱۹ که مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، به صورت تک گروهی هستند. هر چند مطالعاتی درباره مدل‌های چندگروهی این بیماری در مقالات اخیر یافت می‌شود ولی این تعداد در برابر مدل‌های تک گروهی، اندک است. همچنین مدل‌های چندگروهی نقش بسیار مهمی در ایجاد کنترل بیماری خواهند داشت.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/JAMLU-2025-1-2274]

بنابراین، نکته‌ی دیگری که در انتشار ویروس کووید ۱۹ حایز اهمیت است، رفت و آمد بین شهرها یا کشورها است. زیرا معمولاً گسترش بیماری‌ها از یک منطقه جغرافیایی شروع می‌شود و به مناطق جغرافیایی دیگر گسترش می‌یابد. بنابراین، مسافرت‌ها کاملاً نقش مهمی در اپیدمی دارند. مطالعه‌ی اثر مسافرت‌ها و برنامه‌ریزی در مورد آنها می‌تواند تاثیر بسزایی در کنترل بیماری داشته باشد. از این رو مدل‌های چندگروهی به خوبی می‌توانند به بررسی این موضوع بپردازند. زیرا می‌توان با این مدل‌ها به بررسی و تاثیر رفت و آمد بین چند گروه که شامل شهر، کشور یا منطقه می‌شود را در مورد بیماری کووید ۱۹ پرداخت.

برای تجزیه و تحلیل مدل چندگروهی یک بیماری عفونی، اولین کار بررسی نقطه تعادل عاری از بیماری است. اگر تعادل عاری از بیماری در سطح جهانی پایدار مجانبی باشد، به این معنی است که این بیماری در نهایت از بین خواهد رفت و اگر در سطح جهانی به طور مجانبی پایدار نباشد، به این منظور است که بیماری خواهد بود و در نهایت تبدیل به یک بیماری همه‌گیر می‌شود [۱۴]. زمانی که عدد تکثیر کمتر یا مساوی یک است، تعادل عاری از بیماری در سطح جهانی به طور مجانبی پایدار است و زمانی که عدد تکثیر بزرگتر از یک باشد، تعادل عاری از بیماری، ناپایدار است [۱۶، ۱۵].

هدف این مقاله، طراحی یک مدل چندگروهی جدید با چند استراتژی کنترلی مناسب است که در آن، سعی بر این است که کووید ۱۹ از بین برود. تا جایی که می‌دانیم، مطالعه‌ای درباره مدل چندگروهی که در این مقاله به بررسی آن پرداخته‌ایم، وجود ندارد. مطالعه‌ی این مدل چندگروهی می‌تواند به میزان قابل توجهی به کنترل بیماری کووید ۱۹ کمک کند. بنابراین، ابتدا مدلی را برای شیوع کووید ۱۹ در نظر می‌گیریم که برای یک گروه بررسی شده است ولی به منظور توصیف دقیق ویژگی‌ها از میزان شیوع بیماری، ما این مدل را به یک مدل چندگروهی تبدیل خواهیم کرد که پس از فرمول‌بندی مدل کلی، به تجزیه و تحلیل پایداری نقاط تعادل عاری از بیماری خواهیم پرداخت و سپس کنترل بهینه این بیماری را به‌دست خواهیم آورد و در نهایت از داده‌های تقریباً واقعی برای شبیه‌سازی استفاده می‌کنیم. بنابراین مقاله به شرح زیر سازماندهی شده است:

۱ مقدمه، ۲ معرفی مدل ریاضی چندگروهی برای بیماری کووید ۱۹، ۳ نقطه تعادل عاری از بیماری و عدد تکثیر، ۴ کنترل بهینه بیماری کووید ۱۹، ۵ نتایج عددی، ۶ نتیجه گیری.

۲ معرفی مدل ریاضی چند گروهی برای بیماری کووید ۱۹

در این بخش، به طراحی یک مدل چندگروهی جدید می‌پردازیم. ابتدا مدلی را برای شیوع کووید ۱۹ در نظر می‌گیریم که برای یک گروه بررسی شده است ودر آن نقش افراد عفونی بدون علامت و علامت‌دار در انتقال بیماری به صراحت مورد توجه قرار گرفته است. افراد عفونی بدون علامت اغلب ناشناس می‌مانند و احتمالاً تماس‌های بیشتری نسبت به افراد عفونی علامتدار دارند که به ویروس اجازه می‌دهند تا به طور گسترده در جمعیت پخش شود.

از آن جایی که این نوع مدل‌هایی که افراد بدون علامت را در خود جای داده‌اند، اخیراً توجه بیشتری را به خود جلب کرده‌اند. بنابراین، به منظور توصیف دقیق ویژگی‌ها از میزان شیوع بیماری، ما این مدل را به یک مدل

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/JAMLU-2025-1-2274]

چندگروهی تبدیل خواهیم کرد. بنابراین، معادلات حالت بیماری کووید ۱۹ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۱۷]:

$$\frac{ds}{dt} = b - \frac{a}{1+\delta I_u} SI_u - d_1 S \quad (۱)$$

$$\frac{dI_u}{dt} = \frac{a}{1+\delta I_u} SI_u - (\beta + d_1) I_u \quad (۲)$$

$$\frac{dI_k}{dt} = \beta I_u - (y + d_2) I_k \quad (۳)$$

$$\frac{dR}{dt} = yI_k - d_1 R \quad (۴)$$

که در آن S، I_u، I_k و R متغیرهای حالت هستند که به ترتیب جمعیت افراد مستعد، افراد آلوده بدون علامت، افراد آلوده علامتدار و بهبودیافته‌ها را نشان می‌دهند.

متناظر با مدل تک گروهی (۱) تا (۴) مدل چندگروهی را می‌سازیم. منظور از هر گروه، جمعیت در یک مکان جغرافیایی خاص است که آن را با اندیس i نشان می‌دهیم و مدل چنان است که جمعیت کل به همان ۴ زیر مجموعه مطرح در مدل (۱) تا (۴) تقسیم می‌گردد. با الگو برداری از این مدل، مدل زیر را پیشنهاد می‌دهیم:

$$N_i(t) = S_i(t) + I_{u_i}(t) + I_{k_i}(t) + R_i(t) \quad (۵)$$

$$\frac{dS_i}{dt} = b_i - \sum_{j=1}^{N} \frac{a_{ij}}{1+\delta_i I_{u_j}} S_i I_{u_j} - d_{1i} S_i \quad (۶)$$

$$\frac{dI_{u_i}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \frac{a_{ij}}{1+\delta_i I_{u_j}} S_i I_{u_j} - (\beta_i + d_{1i}) I_{u_i} \quad (۷)$$

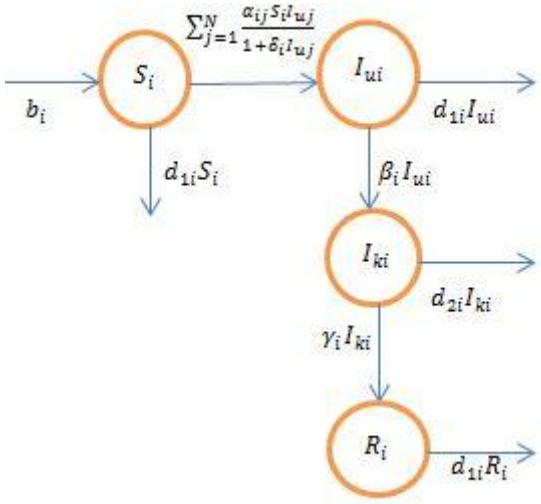
$$\frac{dI_{k_i}}{dt} = \beta_i I_{u_i} - (y_i + d_{2i}) I_{k_i} \quad (۸)$$

$$\frac{dR_i}{dt} = y_i I_{k_i} - d_{1i} R_i \quad (۹)$$

در این جا فرض می‌شود که بیماران علامت‌دار، اجازه ورود به شهر (گروه) دیگر را ندارند و صرفاً ممکن است که فرد بدون علامت، ناخواسته به گروه دیگر وارد شود و اثرگذار باشد. به همین دلیل جمله‌ی دوم معادله اول به صورت تجمعی در نظر گرفته می‌شود که در گروه i ام جمعیت در بخش مستعد (S_i) با تماس کافی با افراد عفونی بدون علامت گروه j ام (I_{u_j}) وارد جمعیت افراد آلوده بدون علامت (I_{u_i}) می‌شوند. نمودار جریان مدل چندگروهی کووید ۱۹ در شکل ۱ ارایه شده است.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/JAMLU-2025-1-2274]



شکل ۱. نمودار جریان مدل چند گروهی کووید ۱۹

تمامی پارامترها در جدول ۱ شرح داده شده است.

جدول ۱. شرح پارامترها

پارامتر	شرح
S_i	جمعیت مستعد گروه i ام
I_{u_i}	جمعیت عفونی بدون علامت گروه i ام
I_{k_i}	جمعیت عفونی علامتدار گروه i ام
R_i	جمعیت بهبود یافته گروه i ام
N_i	کلّ جمعیت گروه i ام
b_i	نرخ ورود جمعیت به گروه i ام
α_{ij}	نرخ انتقال از جمعیت مستعد (S_i) به جمعیت عفونی بدون علامت (I_{u_j})
δ_i	اقدامات و سیاست‌هایی که کشور، برای آگاه‌سازی مردم از بیماری انجام داده است.
β_i	نرخ انتقال از جمعیت عفونی بدون علامت به جمعیت عفونی علامتدار
γ_i	نرخ انتقال از جمعیت عفونی علامتدار به جمعیت بهبود یافته‌ها
d_{1i}	نرخ مرگ و میر طبیعی جمعیت گروه i ام
d_{2i}	مجموع نرخ مرگ ناشی از کووید ۱۹ و مرگ طبیعی جمعیت گروه i ام

۳ نقطه تعادل عاری از بیماری و عدد تکثیر

زمانی که با مدل‌های اپیدمیولوژی سروکار داریم، بسیار مهم است که به این اطمینان برسیم که مدل ارایه‌شده، دینامیکی را نزدیک به آنچه که در جهان واقعی اتفاق می‌افتد، پیش‌بینی کند. یکی از این موارد، این است که جمعیت کل جامعه از نسبت زاد و ولد به مرگ و میر کمتر و همواره بزرگ‌تر از صفر است. بنابراین، قبل از اینکه به سراغ نقطه تعادل عاری از بیماری و عدد تکثیر برویم، قضیه زیر را ارایه می‌دهیم که به اثبات مثبت و کرانداری جواب‌ها می‌پردازد.

قضیه ۳-۱: مجموعه بسته

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/JAMLU-2025-1-2274]

$$\Delta=\left\{(S_1,I_{u_1},I_{k_1},R_1,S_2,I_{u_2},I_{k_2},R_2,...,S_N,I_{u_N},I_{k_N},R_N)\in R_+^{4N}:0\le N_i\le\frac{b_i}{d_{1i}},i=1,2,...,N\right\} \quad (10)$$

با توجه به مدل چندگروهی (۵) تا (۹) پایای مثبت است.

اثبات: فرض کنید $(S_i,I_{u_i},I_{k_i},R_i)$ جواب‌های سیستم(۵) تا (۹) با نقاط اولیه در Δ باشد. در این‌صورت، داریم:

$$\dot{N}_i(t)=\dot{S}_i(t)+\dot{I}_{u_i}(t)+\dot{I}_{k_i}(t)+\dot{R}_i(t)=b_i-\sum_{j=1}^{N}\frac{a_{ij}}{1+\delta_i I_{uj}}S_iI_{uj}-d_{1i}S_i$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\frac{a_{ij}}{1+\delta_i I_{uj}}S_iI_{uj}-(\beta_i+d_{1i})I_{u_i}+\beta_iI_{u_i}-(y_i+d_{2i})I_{k_i}+y_iI_{k_i}-d_{1i}R_i \quad (11)$$

$$=b_i-(S_i+I_{u_i}+R_i)d_{1i}-d_{2i}I_{k_i}$$

سپس ما داریم:

$$\dot{N}_i(t)+d_{1i}N_i(t)=b_i-(d_{2i}-d_{1i})I_{k_i}. \quad (12)$$

بنابراین،

$$\dot{N}_i(t)\le b_i-d_{1i}N_i(t). \quad (13)$$

بر اساس نظریه معادلات دیفرانسیل، داریم:

$$N_i(t)\le e^{-d_{1i}t}N_i(0)+\frac{b_i}{d_{1i}}(1-e^{-d_{1i}t}) \quad (14)$$

و برای $t\to\infty$، ما داریم:

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}N_i(t)\le\frac{b_i}{d_{1i}} \quad (15)$$

بعد از اثبات کرانداری جواب‌ها، به اثبات مثبت بودن آنها می‌پردازیم.

برای این منظور، معادله (۶) را در نظر بگیرید.

$$\frac{dS_i}{dt}=b_i-\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{a_{ij}}{1+\delta_iI_{uj}}I_{uj}+d_{1i}\right)S_i \quad (16)$$

بنابراین،

$$\frac{dS_i}{dt}\ge-\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{a_{ij}}{1+\delta_iI_{uj}}I_{uj}+d_{1i}\right)S_i \quad (17)$$

$$\frac{dS_i}{dt}+\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{a_{ij}}{1+\delta_iI_{uj}}I_{uj}+d_{1i}\right)S_i\ge0 \quad (18)$$

سپس طرفین معادله را در

$$\exp\left(\int_0^t\left(d_{1i}+\sum_{j=1}^{N}\frac{a_{ij}}{1+\delta_iI_{uj}}I_{uj}\right)dS\right) \quad (19)$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/JAMLU-2025-1-2274]

ضرب می‌کنیم. پس داریم:

$$\frac{d}{dt}\left[S_i(t)\exp\left(d_{1i}t + \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{a_{ij}}{1+\delta_i I_{uj}} I_{uj} \right) dS \right) \right] \geq 0 \qquad (۲۰)$$

سپس با انتگرال‌گیری داریم:

$$S_i(t)\exp\left(d_{1i}t + \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{a_{ij}}{1+\delta_i I_{uj}} I_{uj} \right) dS \right) - S_i(0) \geq 0 \qquad (۲۱)$$

سپس

$$S_i(t) \geq S_i(0)\exp\left(-\left[d_{1i}t + \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{a_{ij}}{1+\delta_i I_{uj}} I_{uj} \right) dS \right] \right) \qquad (۲۲)$$

این رابطه نشان می‌دهد که اگر $S_i(0) \geq 0$، آنگاه $S_i(t) \geq 0$، $\forall t \geq 0$.

با روش مشابه می‌توان دریافت که I_{u_i}، I_{k_i} و R نیز نامنفی هستند، هنگامی که $I_{u_i}(0)$، $I_{k_i}(0)$ و $R(0)$ نامنفی‌اند. از این رو با اثبات کرانداری و مثبت بودن جواب‌ها، Δ معرفی شده، پایای مثبت است.□

اکنون به تجزیه و تحلیل پایداری نقطه تعادل عاری از بیماری مدل (۵) تا (۹) می‌پردازیم. در این حالت، جمعیت هیچ عفونتی را از افراد مبتلا به کووید ۱۹ دریافت نمی‌کند. بنابراین $I_{u_i} = I_{k_i} = 0$ و سیستم (۵) تا (۹) نقطه تعادل غیر عفونی یا عاری از بیماری $\mathcal{P}_0$ را دارد که به صورت زیر است:

$$p_0 = (S_1^0, I_{u_1}^0, I_{k_1}^0, R_1^0, ..., S_N^0, I_{u_N}^0, I_{k_N}^0, R_N^0) = (\frac{b_1}{d_{11}}, 0, 0, 0, ..., \frac{b_N}{d_{1N}}, 0, 0, 0) \qquad (۲۳)$$

برای مدل (۵) تا (۹) ابتدا اجزای سیستم را که مستقیم با عفونت مرتبط هستند را در نظر می‌گیریم که همان I_{u_i} و I_{k_i} هستند. فرض کنید $\mathcal{F}_i$ سرعت بروز عفونت و $\mathcal{V}_i$ سرعت ورود افراد به ناحیه مورد مطالعه می‌باشد که برای $i = 1,2,...,n$ به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} \frac{dI_{u_i}}{dt} \\ \frac{dI_{k_i}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{a_{ij} S_i I_{uj}}{1+\delta_i I_{u_j}} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\beta_i + d_{1i}) I_{u_i} \\ -\beta_i I_{u_i} + (\gamma_i + d_{2i}) I_{k_i} \end{bmatrix} = F_i - V_i \qquad (۲۴)$$

با توجه به [۱۸]، F و V به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F = \left[\frac{\partial F_i(p_0)}{\partial x_j} \right], V = \left[\frac{\partial V_i(p_0)}{\partial x_j} \right], x_j = (I_{u_i}, I_{k_i}), \qquad i = 1,2,...,n. \qquad (۲۵)$$

بنابراین، بوسیله محاسبه ماتریس ژاکوبین F و V در نقطه تعادل عاری از بیماری ($\mathcal{P}_0$) داریم:

$$V = diag\{v_{11},...,v_{NN}\} \text{ و } F = (f_{ij})_{N\times N} \qquad (۲۶)$$

$$f_{ij} = \begin{bmatrix} a_{ij} S_i^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۲۷)$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/JAMLU-2025-1-2274]

$$v_{ii}=\begin{bmatrix}\beta_i+d_{1i} & 0\\ -\beta_i & \gamma_i+d_{2i}\end{bmatrix} \quad (۲۸)$$

بنابراین به راحتی به‌دست می‌آید که: $V^{-1}=diag\left\{v_{11}^{-1},...,v_{NN}^{-1}\right\}$ به طوری که:

$$v_{ii}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\beta_i+d_{1i}} & 0\\ \frac{\beta_i}{(\beta_i+d_{1i})(\gamma_i+d_{2i})} & \frac{1}{\gamma_i+d_{2i}}\end{bmatrix} \quad (۲۹)$$

از طرفی، $FV^{-1}=(f_{ij}v_{ii}^{-1})_{N\times N}$، که داریم:

$$f_{ij}v_{ii}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{a_{ij}S_i^*}{\beta_i+d_{1i}} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad (۳۰)$$

فرض کنید $R_0=\rho(FV^{-1})$ شعاع طیفی ماتریس FV^{-1} است که در ادبیات اپیدمی، به آن عدد تکثیر گفته می‌شود [۱۸]. برای بررسی شرایط پایداری بر اساس عدد تکثیر، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۳-۲: برای سیستم (۵) تا (۹)، تابع $f_{ij}(S_i,I_{u_j})=\frac{S_iI_{u_j}}{1+\delta_iI_{u_j}}$ را تعریف می‌کنیم و با توجه به [۱۹] مفروضات زیر را در نظر می‌گیریم:

(۱) $0<S_i\le S_i^*$، $0<\lim_{I_{uj}\to}+\frac{f_{ij}(S_i,I_{uj})}{I_{u_i}}=C_{ij}\le+\infty$

(۲) $0<f_{ij}(S_i,I_{u_j})\le C_{ij}(S_i)I_{u_j}$ برای هر $I_{u_j}>0$ و $0<S_i\le S_i^*$

(۳) $0<C_{ij}(S_i)\le C_{ij}(S_i^*)$ برای هر $0<S_i\le S_i^*$

در این صورت تعادل عاری از بیماری $(\mathcal{P}_0)$ به طور مجانبی، پایدار سراسری است، اگر $R_0\le 1$ و تعادل عاری از بیماری $(\mathcal{P}_0)$ ناپایدار است، اگر $R_0>1$.

اثبات: چون

$$V^{-1}F=V^{-1}FV^{-1}V \quad (۳۱)$$

بنابراین، $V^{-1}F$ و FV^{-1} متشابه‌اند و ماتریس‌های متشابه، مقادیر ویژه یکسانی دارند. بنابراین،

$$\rho(V^{-1}F)=\rho(FV^{-1})=R_0 \quad (۳۲)$$

از طرف دیگر $V^{-1}F$ یک ماتریس نامنفی است، زیرا ما داریم

$$V_{ii}^{-1}f_{ij}=\begin{bmatrix}\frac{a_{ij}S_i^*}{\beta_i+d_{1i}} & 0\\ \frac{\beta_ia_{ij}S_i^*}{(\beta_i+d_{1i})(\gamma_i+d_{2i})} & 0\end{bmatrix} \quad (۳۳)$$

به راحتی می‌توان دید که تمام جملات آن، نامنفی است و به وسیله قضیه پرون فروبینیوس [۲۰]، $V^{-1}F$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/JAMLU-2025-1-2274]

یک بردار ویژه مثبت متناظر $\mathcal{X}$ دارد. بنابراین داریم

$$x(V^{-1}F) = \rho(FV^{-1})x \quad (۳۴)$$

فرض کنید $x = (v_1, v_2, ..., v_n, w_1, w_2, ..., w_n)$ به طوری که $v_k w_k > 0$ و $k = 1, 2, ..., n$ آنگاه

$$(v_1, v_2, ..., v_n, w_1, w_2, ..., w_n)V^{-1}F = R_0(v_1, v_2, ..., v_n, w_1, w_2, ..., w_n) \quad (۳۵)$$

فرض کنید $w = \sum_{i=1}^{N} k_i I_{u_i} + \sum_{i=1}^{N} l_i I_{k_i}$ یک تابع لیاپانوف باشد، به طوری که

$$(k_1, l_1, k_2, l_2, ..., k_n, l_n) = (v_1, v_2, ..., v_n, w_1, w_2, ..., w_n)V^{-1} \quad (۳۶)$$

با محاسبه مشتق $\mathcal{W}$ و مفروضات قضیه (۳-۲)، داریم:

$$\dot{w} = \sum_{i=1}^{N}\left[k_i \frac{dI_{u_i}}{dt} + l_i \frac{dI_{k_i}}{dt} \right] \quad (۳۷)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} k_i \left[\sum_{j=1}^{N} \frac{a_{ij}S_i}{1+\delta_i I_{u_j}} I_{u_j} - (\beta_i + d_{1i})I_{u_i} \right] + \sum_{i=1}^{N} k_i \left[\beta_i I_{u_i} - (\gamma_i + d_{2i})I_{k_i} \right] \quad (۳۸)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} k_i \left[\sum_{j=1}^{N} \frac{a_{ij}S_i^*}{1+\delta_i I_{u_j}} I_{u_j} - (\beta_i + d_{1i})I_{u_i} \right] + \sum_{i=1}^{N} k_i \left[\beta_i I_{u_i} - (\gamma_i + d_{2i})I_{k_i} \right] \quad (۳۹)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} k_i \left[\sum_{j=1}^{N} a_{ij}S_i^* I_{u_j} - (\beta_i + d_{1i})I_{u_i} \right] + \sum_{i=1}^{N} k_i \left[\beta_i I_{u_i} - (\gamma_i + d_{2i})I_{k_i} \right] \quad (۴۰)$$

$$= (k_1, k_2, ..., k_n)\left[\sum_{j=1}^{N} \frac{a_{ij}b_i I_{u_j}}{d_{1i}} - (\beta_i + d_{1i})I_{u_i} \right] + (l_1, l_2, ..., l_n)\left[\beta_i I_{u_i} - (\gamma_i + d_{2i})I_{k_i} \right] \quad (۴۱)$$

$$= (k_1, l_1, k_2, l_2, ..., k_n, l_n)(F - V)X = (v_1, v_2, ..., v_n, w_1, w_2, ..., w_n)V^{-1}(F - V)X \quad (۴۲)$$

$$= (v_1, v_2, ..., v_n, w_1, w_2, ..., w_n)(V^{-1}F - I)X = (v_1, v_2, ..., v_n, w_1, w_2, ..., w_n)(R_0 - 1)X \quad (۴۳)$$

به طوری که $X = (I_{u_1}, I_{k_1}, I_{u_2}, I_{k_2}, ..., I_{u_n}, I_{k_n})$. بنابراین، ما نتایج زیر را می‌توانیم به‌دست آوریم:

(۱) اگر عدد تکثیر $R_0 < 1$ ، آنگاه $w \leq 0$.

(۲) اگر $R_0 < 1$ آنگاه $w = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

(۳) اگر $R_0 = 1$ آنگاه $w = 0$ بنابراین دلالت بر آن دارد که $I_{u_i} = 0$، $I_{k_i} = 0$ یا $S_i = S_i^*$، $i = 1, 2, ..., n$ در نتیجه، تنها زیر مجموعه ثابت فشرده از مجموعه‌ای که $w = 0$ است، مجموعه یکتای p_0 است.

بنابراین، بنا بر اصل عدم تغییر لاسال p_0 به طور مجانبی، پایدار سراسری است. اگر $R_0 > 1$ و $x \neq 0$ آنگاه $w > 0$ در یک همسایگی از p_0 است. از این رو نقطه تعادل عاری از بیماری p_0 ناپایدار است، اگر $R_0 > 1$ باشد. بنابراین، اثبات قضیه کامل شد.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/JAMLU-2025-1-2274]

٤ کنترل بهینه بیماری کووید ۱۹

مسایل کنترل بهینه یا بهینه‌سازی دینامیکی، عبارت است از پیدا کردن یک ورودی کنترل برای سیستم، به طوری که ضمن برآوردن قید دیفرانسیلی و فیزیکی، تابع هدف یا شاخص عملکرد سیستم را بهینه کند. انواع مختلف از این مسایل نظیر مساله‌ی حداقل زمان، مساله ی تعقیب، مساله‌ی ردیابی و غیره وجود دارد [۲۱،۲۲].

در این بخش، ما یک مدل کنترل بهینه را برای مدل چندگروهی کووید ۱۹ محاسبه می‌کنیم. اگر $R_0 > 1$ تعادل عاری از بیماری $\mathcal{P}_0$ ناپایدار است. در این صورت، می‌خواهیم کنترل مناسبی را طراحی کنیم که $\mathcal{P}_0$ پایدار باشد و هدف آن، به حداقل رساندن تعداد افراد عفونی بدون علامت و علامتدار است.

بنابراین برای مدل (۵) تا (۹) سه کنترل در نظر گرفته‌ایم که به این صورت می‌باشد:

کنترل اول، شستن دست‌ها، استفاده از ماسک صورت و دوری از افراد آلوده می‌باشد که با w_i نشان می‌دهیم. دومین کنترل، تشویق افراد برای پیوستن به قرنطینه در صورت تماس با فرد آلوده که با θ_i نشان می‌دهیم و کنترل سوم هم این است که به افراد آلوده اطلاع داده شود که در بیمارستان یا خانه بمانند که با v_i نشان داده می‌شود.

در این صورت مدل سیستم (۵) تا (۹) با کنترل به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{dS_i}{dt} = b_i - (1-w_i)\sum_{j=1}^{N}\frac{a_{ij}}{1+\delta_i I_{u_j}} S_i I_{u_j} - d_{1i} S_i \tag{۴۴}$$

$$\frac{dI_{u_i}}{dt} = (1-w_i)\sum_{j=1}^{N}\frac{a_{ij}}{1+\delta_i I_{u_j}} S_i I_{u_j} - (\beta_i + d_{1i}) I_{u_i} - \theta_i I_{u_i} \tag{۴۵}$$

$$\frac{dI_{k_i}}{dt} = \beta_i I_{u_i} - (\gamma_i + d_{2i}) I_{k_i} - v_i I_{k_i} + (1-t_i)\theta_i I_{u_i} \tag{۴۶}$$

$$\frac{dR_i}{dt} = \gamma_i I_{k_i} - d_{1i} R_i + t_i \theta_i I_{u_i} + v_i I_{k_i} \tag{۴۷}$$

به طوری که $S_i(0) \geq 0, I_{u_i}(0) \geq 0, I_{k_i}(0) \geq 0, R_i(0) \geq 0$ برای هر $i = 1,2,...,n$ مقادیر اولیه، متغیرها هستند. تابع هدف به صورت زیر می‌باشد:

$$J(w_i, \theta_i, v_i) = \int_0^T \left(I_{u_i} + I_{k_i} + \frac{A_i^1}{2} w_i^2 + \frac{A_i^2}{2} \theta_i^2 + \frac{A_i^3}{2} v_i^2 \right) dt \tag{۴۸}$$

به‌طوری که پارامترهای $A_i^1 \geq 0$، $A_i^2 \geq 0$ و $A_i^3 \geq 0$ برای هر $i = 1,2,...,n$ ضرایب هزینه در زمان t و مرتبط با کنترل‌های اعمال شده هستند، T نیز، زمان پایانی است. بنابراین، قصد داریم کنترل‌های w_i^*، θ_i^* و v_i^* را به‌دست آوریم، بطوریکه:

$$J(w_i^*, \theta_i^*, v_i^*) = \min J(w_i, \theta_i, v_i), \quad (w_i, \theta_i, v_i) \in C_{ad} \tag{۴۹}$$

در حالی که

$$C_{ad} = \left\{ (w_i, \theta_i, v_i) : 0 \leq w_i \leq 1, 0 \leq \theta_i \leq 1, 0 \leq v_i \leq 1; t \in [0, T] \right\} \tag{۵۰}$$

مساله کنترل بهینه را با به کارگیری اصل بیشینه پونتریاگین محاسبه می‌کنیم که شرایط لازم برای بهینگی را فراهم می‌کند [۲۳]. بنابراین تابع هامیلتونی $H_i(t)$ در زمان t را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/JAMLU-2025-1-2274]

$$H_i = I_{u_i} + I_{k_i} + \frac{A_i^1}{2} w_i^2 + \frac{A_i^2}{2} \theta_i^2 + \frac{A_i^3}{2} v_i^2 + \sum_{k=1}^{4} \psi_i^k f_k(S_i, I_{u_i}, I_{k_i}, R_i) \quad (۵۱)$$

در حالی که ψ_i^k، k امین متغیر الحاقی در زمان t و f_k تابع سمت راست سیستم کنترل (۴) و مربوط به k امین حالت در زمان t است.

قضیه ۴-۱: کنترل بهینه‌های w_i^*، θ_i^* و v_i^* مرتبط به سیستم کنترل (۴۴) تا (۴۷) به صورت زیر هستند:

$$w_i^* = \max\left(0, \min\left(1, -\frac{(\psi_i^1 - \psi_i^2)}{A_i^1} \sum_{j=1}^{N} \frac{a_{ij} S_i I_{u_j}}{1 + \delta_i I_{u_j}}\right)\right) \quad (۵۲)$$

$$\theta_i^* = \max\left(0, \min\left(1, \frac{\psi_i^2 - t_i \psi_i^2 - (1-t_i)\psi_i^3}{A_i^2} I_{u_i}\right)\right) \quad (۵۳)$$

$$v_i^* = \max\left(0, \min\left(1, \frac{(\psi_i^3 - \psi_i^4)}{A_i^3} I_{k_i}\right)\right) \quad (۵۴)$$

اثبات. ما می‌دانیم که

$$f_1(S_i, I_{u_i}, I_{k_i}, R_i) = b_i - (1-w_i) \sum_{j=1}^{N} \frac{a_{ij}}{1 + \delta_i I_{u_j}} S_i I_{u_j} - d_{1i} S_i \quad (۵۵)$$

$$f_2(S_i, I_{u_i}, I_{k_i}, R_i) = (1-w_i) \sum_{j=1}^{N} \frac{a_{ij}}{1 + \delta_i I_{u_j}} S_i I_{u_j} - (\beta_i + d_{1i}) I_{u_i} - \theta_i I_{u_i} \quad (۵۶)$$

$$f_3(S_i, I_{u_i}, I_{k_i}, R_i) = \beta_i I_{u_i} - (\gamma_i + d_{2i}) I_{k_i} - v_i I_{k_i} + (1-t_i)\theta_i I_{u_i} \quad (۵۷)$$

$$f_4(S_i, I_{u_i}, I_{k_i}, R_i) = \gamma_i I_{k_i} - d_{1i} R_i + t_i \theta_i I_{u_i} + v_i I_{k_i} \quad (۵۸)$$

برای زمان $t \in [0, T]$، معادلات الحاقی، با استفاده از اصل بیشینه پونتریاگین به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\dot{\psi}_i^1 = -\frac{\partial H}{\partial S_i} = \psi_i^1 d_{1i} + (\psi_i^1 - \psi_i^2)(1-w_i) \sum_{j=1}^{N} \frac{a_{ij} I_{u_j}}{1 + \delta_i I_{u_j}} \quad (۵۹)$$

(۶۰)

$$\dot{\psi}_i^2 = -\frac{\partial H}{\partial I_{u_i}} = (\beta_i + d_{1i} + \theta_i)\psi_i^2 - (\psi_i^1 - \psi_i^2)(1-w_i) S_i \sum_{j=1}^{N} \frac{a_{ij}}{(1 + \delta_i I_{u_j})^2} - (1-t_i)\theta_i \psi_i^3 - t_i \theta_i \psi_i^4 - 1$$

$$\dot{\psi}_i^3 = -\frac{\partial H}{\partial I_{k_i}} = (\gamma_i + d_{2i} + v_i)\psi_i^3 - \gamma_i \psi_i^4 - v_i \psi_i^4 - 1 \quad (۶۱)$$

$$\dot{\psi}_i^4 = -\frac{\partial H}{\partial R_i} = d_{1i} \psi_i^4 \quad (۶۲)$$

با شرایط اریبی در زمان T، $\psi_i^1(T) = 0$، $\psi_i^2(T) = 0$ ، $\psi_i^3(T) = 0$ و $\psi_i^4(T) = 0$ برای هر $t \in [0, T]$ کنترل‌های بهینه w_i^*، θ_i^* و v_i^* با شرایط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\partial H}{\partial w_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial \theta_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial v_i} = 0 \quad (۶۳)$$

بنابراین به‌دست می‌آوریم

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/JAMLU-2025-1-2274]

$$A_1^1 w_i + (-\psi_i^1 + \psi_i^2)\sum_{j=1}^{N} \frac{a_{ij} I_{u_j}}{1+\delta_i I_{u_j}} = 0 \quad (۶۴)$$

$$A_i^2 \theta_i - \psi_i^2 I_{u_i} + t_i \psi_i^4 I_{u_i} + (1-t_i)\psi_i^3 I_{u_i} = 0 \quad (۶۵)$$

$$A_i^3 v_i - \psi_i^3 I_{k_i} + \psi_i^4 I_{k_i} = 0 \quad (۶۶)$$

و داریم:

$$w_i = -\frac{(\psi_i^1 - \psi_i^2)}{A_i^1}\sum_{j=1}^{N} \frac{a_{ij} S_i I_{u_j}}{1+\delta_i I_{u_j}} \quad (۶۷)$$

$$\theta_i = \frac{\psi_i^2 - t_i\psi_i^2 - (1-t_i)\psi_i^3}{A_i^2} I_{u_i} \quad (۶۸)$$

$$v_i = \frac{(\psi_i^3 - \psi_i^4)}{A_i^3} I_{k_i} \quad (۶۹)$$

با استفاده از C_{ad} کنترل‌های بهینه زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$w_i^* = \max\left(0, \min\left(1, -\frac{(\psi_i^1 - \psi_i^2)}{A_i^1}\sum_{j=1}^{N} \frac{a_{ij} S_i I_{u_j}}{1+\delta_i I_{u_j}}\right)\right) \quad (۷۰)$$

$$\theta_i^* = \max\left(0, \min\left(1, \frac{\psi_i^2 - t_i\psi_i^2 - (1-t_i)\psi_i^3}{A_i^2} I_{u_i}\right)\right) \quad (۷۱)$$

$$v_i^* = \max\left(0, \min\left(1, \frac{(\psi_i^3 - \psi_i^4)}{A_i^3} I_{k_i}\right)\right) \quad (۷۲)$$

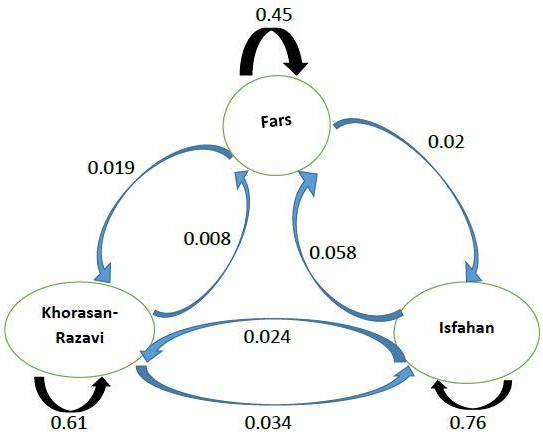
۵ نتایج عددی

این بخش، شبیه‌سازی بیماری کووید ۱۹ را ارایه می‌دهد. مدل کووید ۱۹ چند گروهی (۵) تا (۹) را در نظر بگیرید. ما در این بخش سه گروه را به عنوان نماینده در نظر می‌گیریم که به ترتیب استان‌های اصفهان، خراسان رضوی و فارس است (شکل ۲ را ببینید). برای شبیه‌سازی چون هیچ داده مستقیمی در مورد ضریب عفونت (α_{ij}) در میان سه استان وجود ندارد، بنابراین ما رفت و آمد در بین سه استان در نوروز ۱۴۰۰ را به عنوان ضرایب آلودگی (α_{ij}) تعیین می‌کنیم. دلیل انتخاب این بازه زمانی (نوروز ۱۴۰۰) این است که از شهریور ۱۴۰۰، سرعت واکسیناسیون افزایش یافت و قبل از این تاریخ، یا هنوز واکسنی نبوده و یا خیلی محدود و به میزان خیلی کم استفاده شده است. این داده‌ها از مرکز مدیریت راه‌های کشور به‌دست آمده است (https://141.ir). ماتریس $A=(a_{ij})_{N\times N}$ به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} ۰/۷۶ & ۰/۰۲۴ & ۰/۰۵۸ \\ ۰/۰۳۴ & ۰/۶۱ & ۰/۰۰۸ \\ ۰/۰۲ & ۰/۰۱۹ & ۰/۴۵ \end{bmatrix} \quad (۷۳)$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/JAMLU-2025-1-2274]



شکل ۲. ضریب آلودگی در بین استان‌های اصفهان، خراسان رضوی و فارس

اطلاعات به‌دست آمده از مرکز آمار ایران (www.amar.org.ir) حاکی از این است که نرخ مرگ و میر سالانه برابر با ۰/۰۰۴۷۶ و نرخ تولد سالانه برابر با ۰/۰۱۴۴ می‌باشد. با توجه به داده‌ها در سایت وزارت بهداشت، درمان و آموزش پزشکی (https://behdasht.gov.ir) نرخ مرگ و میر در اثر ابتلا به کووید، ۰/۰۰۰۷۶ است. بنابراین، $d_{۲i}$ که مجموع مرگ ناشی از کووید ۱۹ و مرگ و میر طبیعی در گروه i ام است، برابر با ۰/۰۰۵۵۲ برای ۳و۲و۱ $= i$ می باشد. با مقادیر بالای پارامترها ماتریس $FV^{-۱}$ به صورت زیر است:

$$FV^{-۱} = \begin{bmatrix} ۹۵/۷۹۲ & ۳/۰۲۵ & ۷/۳۱۰ \\ ۴/۲۸۵ & ۷۶/۸۸۶ & ۱/۰۰۸ \\ ۲/۲۵۱ & ۲/۳۹۵ & ۵۶/۷۱۹ \end{bmatrix} \quad (۷۴)$$

چون ۱> ۹۶/۹۹۹۶ $= \rho(FV^{-۱}) = R_۰$، از قضیه (۳-۲) می‌توان فهمید که $\mathcal{P}_۰$ ناپایدار است.

ما ۲۰ اسفند ۱۳۹۹ را به عنوان زمان صفر در نظر گرفتیم که دلیل انتخاب این تاریخ، آغاز طرح نوروزی و شروع رفت و آمدها در بین سه استان بود. ما در این قسمت، گروه مستعد را جمعیت هر استان در نظر گرفتیم و گروه افراد عفونی بدون علامت را معادل یک دهم جمعیت مرکز هر استان در نظر گرفتیم.

داده‌های به‌دست آمده از دانشگاه علوم پزشکی اصفهان (https://mui.ac.ir) در تاریخ ۲۰ اسفند ۱۳۹۹، نشان می‌دهد که تعداد جمعیت عفونی علامت‌دار در اصفهان ۲۸۶ $= I_{k_۱}(۰)$ است و تعداد جمعیت بهبودیافته در این استان برابر ۲۱ $= R_۱(۰)$ می‌باشد.

همچنین، داده‌های دانشگاه علوم پزشکی خراسان رضوی (https://mums.ac.ir) در همین تاریخ، نشان می‌دهد که تعداد جمعیت عفونی علامت‌دار در خراسان رضوی ۱۷۰ $= I_{k_۲}(۰)$ است و تعداد جمعیت بهبودیافته برابر ۴۰ $= R_۲(۰)$ می‌باشد.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/JAMLU-2025-1-2274]

داده‌های دانشگاه علوم پزشکی فارس (https://sums.ac.ir) نیز نشان می‌دهد که تعداد جمعیت عفونی علامتدار در استان فارس ۱۵۱ $= I_{k_3}(0)$ است و تعداد جمعیت بهبودیافته برابر ۱۸ $= R_3(0)$ می‌باشد. برای شبیه‌سازی مدل، پارامترها و مفروضات در جدول ۲ و جدول ۳ آورده شده است.

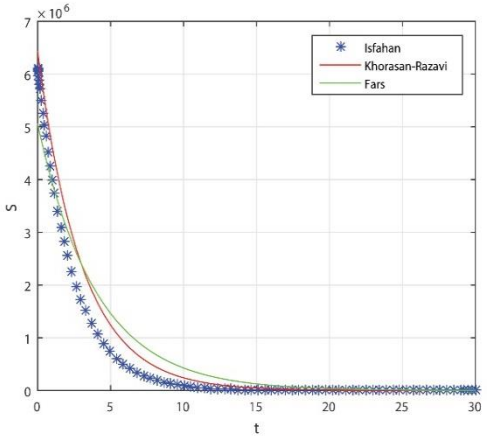
جدول ۲. مقادیر پارامترها

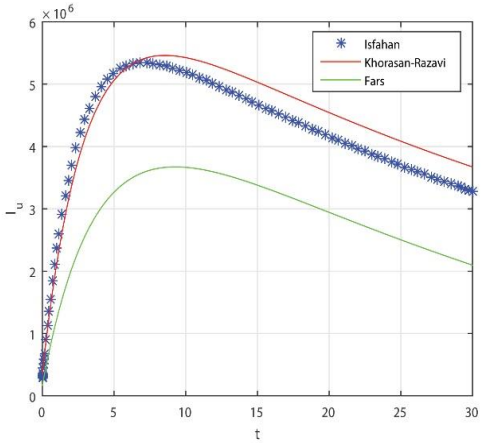
پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
$R_1(0)$	۲۱	$S_1(0)$	۶۱۲۰۵۸۰
$R_2(0)$	۴۰	$S_2(0)$	۶۴۳۴۵۰۱
$R_3(0)$	۱۸	$S_3(0)$	۵۰۵۴۷۰۰
b_i	۰/۰۱۴۴	$I_{u_1}(0)$	۲۸۶۱۲۶
δ_i	۲	$I_{u_2}(0)$	۳۶۱۹۰۰
β_i	۰/۰۱۹	$I_{u_3}(0)$	۱۶۹۰۸۱
γ_i	۰/۰۳	$I_{k_1}(0)$	۲۸۶
d_{1i}	۰/۰۰۴۷۶	$I_{k_2}(0)$	۱۷۰
d_{2i}	۰/۰۰۵۵۲	$I_{k_3}(0)$	۱۵۱

جدول ۳. ضرایب هزینه مرتبط با کنترل‌های اعمال شده در زمان t

A_1^1	A_2^1	A_3^1	A_1^2	A_2^2	A_3^2	A_1^3	A_2^3	A_3^3	t_1	t_2	t_3
۷	۳	۳	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱

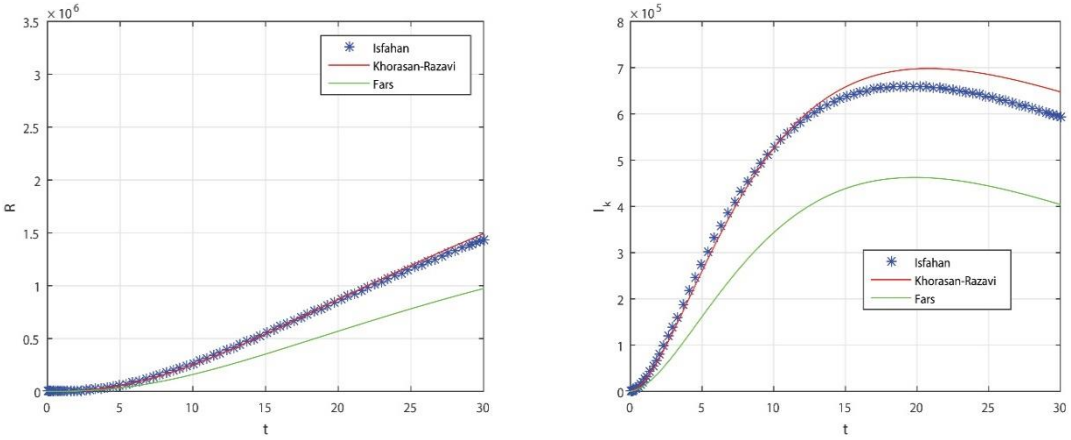
بر اساس داده‌های بالا، شبیه‌سازی را برای شیوع کووید ۱۹ در سه استان اصفهان، خراسان رضوی و فارس انجام می‌دهیم. شکل ۳ تغییرات در تعداد افراد سه استان را در حالت بدون کنترل نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود تعداد افراد مستعد S در حالت بدون کنترل، به سرعت کاهش یافته و این نشان دهنده این است که افراد مستعد به سرعت در حال رفتن به گروه‌های عفونی بدون علامت و علامتدار هستند. بنابراین، میزان عفونت بسیار بوده و تعداد افراد آلوده بدون علامت I_u و تعداد افراد آلوده علامتدار I_k به سرعت افزایش یافته است.



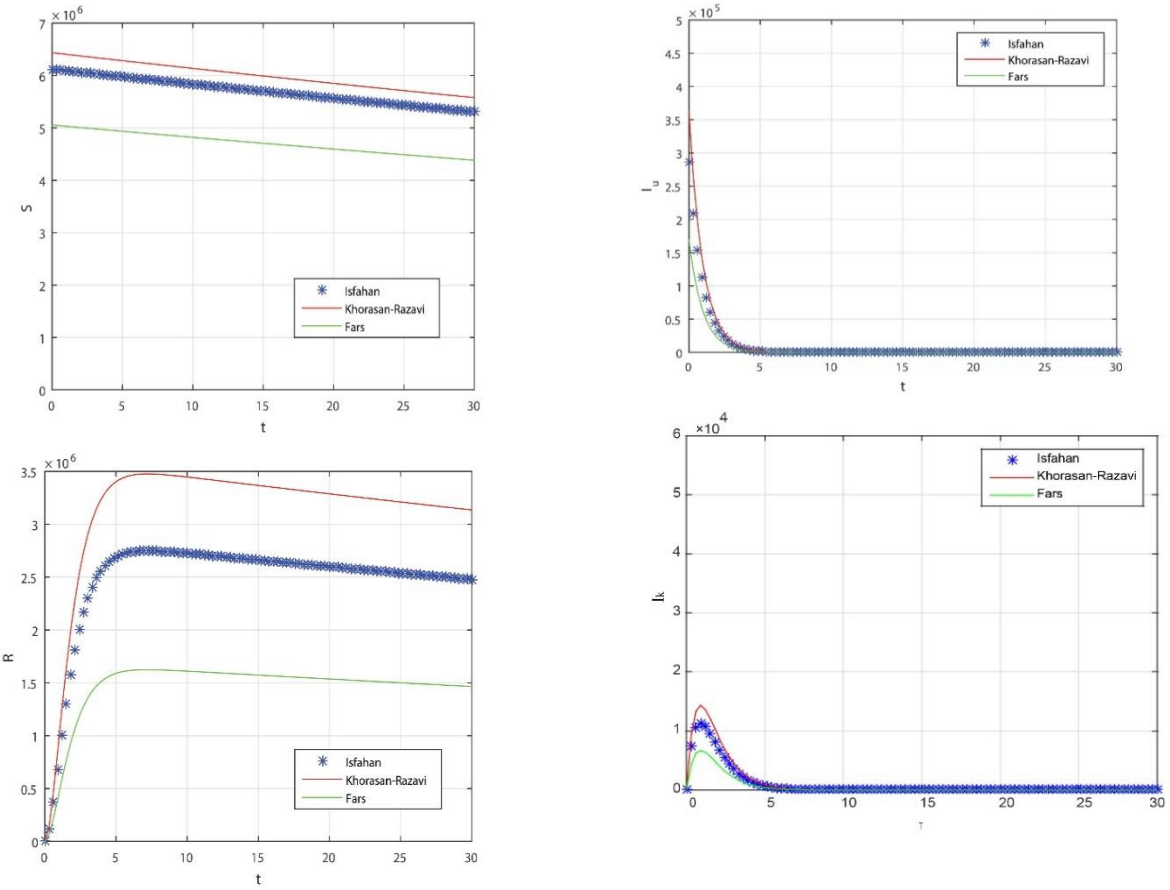


[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/JAMLU-2025-1-2274]



شکل ۳. نمودارهای S، I_u، I_k و R در سه استان بدون کنترل با استفاده از داده‌های جدول ۲



شکل ٤. نمودارهای S، I_u، I_k و R در سه استان با کنترل با استفاده از داده‌های جدول ۲

شکل ۴ تغییرات در تعداد افراد سه استان را با کنترل نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود تعداد افراد مستعدS در سه استان به سرعت افزایش یافته و دلیل آن این است که افراد مستعد دیگر وارد گروه‌های دیگر

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/JAMLU-2025-1-2274]

نشده‌اند. بنابراین تعداد افراد عفونی بدون علامت I_u و افراد عفونی علامتدار I_k بسیار کاهش‌یافته است و نیز تعداد افراد بهبودیافته R نیز افزایش‌یافته است.

نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که با اعمال کنترل، تعداد افراد مستعد و بهبودیافته افزایش می‌یابد، در حالی که تعداد افراد عفونی بدون علامت و علامتدار به شدت کاهش می‌یابد.

٦ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

ما در این مقاله، یک مدل چندگروهی بیماری کووید ۱۹ را ارایه کردیم و برای جلوگیری از شیوع بیماری، سه کنترل برای آن درنظر گرفتیم که هدف، کاهش تعداد مبتلایان بود. همان طور که در تصاویری که از نتایج شبیه‌سازی به‌دست آمده‌اند، پیدا است، گسترش بیماری توسط کنترل کننده‌ها، کنترل شده است و تعداد افراد آلوده بدون علامت و افراد آلوده علامتدار به شدت کاهش یافته است.

بنابراین، نتایج پژوهش حاضر نشان داد که روش‌های مدل‌سازی به طور گسترده‌ای برای مدل‌سازی شیوع بیماری‌های همه گیر در جامعه می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. اما، مدل‌سازی‌های تک گروهی، نمی‌توانند به طور هم‌زمان چند منطقه را از نظر شیوع بیماری بررسی کنند. بنابراین، در میان رویکردهای مدل‌سازی، مدل چندگروهی از اهمیت بیشتری برخوردار است. جهت تخمین دقیق‌تر گسترش بیماری‌های همه گیر مانند کرونا، پیشنهاد می‌شود از مدل‌های توسعه‌یافته و با در نظر گرفتن شاخص‌های بیشتر استفاده کرد. همچنین، می‌توان کنترل دیگری به نام واکسن را نیز، به این مدل اضافه کرد.

تشکر و قدردانی

بدین وسیله از کلیه افرادی که در انجام این مطالعه همکاری نمودند، تشکر و قدردانی به عمل می‌آید.

تضاد منافع

در انجام پژوهش حاضر، نویسندگان هیچ گونه تضاد منافعی نداشته اند.

منابع

[1] World Health Organization. Naming the coronavirus disease (COVID-19) and virus that causes it. https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019/technical-guidance/naming-the-coronavirus-disease-(covid-2019)-and-the-virus-that-causes-it,February 2020.

[2] World Health Organization. Statement on the second meeting of the international health regulations (2005).emergency committee regarding the outbreak of novel coronavirus (2019-ncov). https://www.who.int/news-room/detail/30-01-2020-statement-on-the-second-meeting-of-the-international-health-regulations-(2005)-emergency-committee-regarding-the-outbreak-of-novel-coronavirus-(2019-ncov), January 2020.

[3] Coronavirus (covid_19). https://covid19.who.int/. Accessed 2 March 2021.

[4] Rohith, G., Devika, K. B., (2020). Dynamics and control of COVID-19 pandemic with nonlinear incidence rates. Nonlinear Dyn, 101, 2013-2026.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/JAMLU-2025-1-2274]

[5] Rashidi, H., (2022). A mathematical optimization model for scheduling students' classes in biological corona conditions. Journal of Operational Research in Its Application (Applied Mathematics)-Lahijan Azad University, 71(4), 33-52. (In Persian).
[6] Zhai, Sh., Luo, G., Huang, T., Wang, X., Tao, J., Zhou, P., (2021). Vaccination control of an epidemic model with time delay and its application to COVID-19. Nonlinear Dyn, 106, 1279–1292.
[7] Shamsara, E., Shamsara, J., Afsharnezhad, Z., (2016). Optimal control therapy and vaccination for special HIV-1 model with delay. Theory in Biosciences, 135, 217–230.
[8] Maier, B. F., Brockmann, D., (2020). Effective containment explains sub-exponential growth in confirmed cases of recent COVID-19 outbreak in China. Science 368, 742-746.
[9] Mohsen, A. A., Al-Husseiny, H. F., Zhou, X., Hattaf, K., (2020). Global stability of COVID-19 model involving the quarantine strategy and media coverage effects. AIMS Public Health 7-3, 587-605.
[10] Khoshnaw, S. H. A., Salih, R. H., Sulaimany, S., (2020). Mathematical modeling for coronavirus disease (COVID-19) in predicting future behaviours and sensitivity analysis. Math. Model. Nat. Phenom. 15, 1-13.
[11] Dhar, A. (2020). A critique of the covid-19 analysis for India by Singh and Adhikari. arXiv preprint arXiv:2004.05373.
[12] Tiwari, A. (2020). Modeling and analysis of the covid-19 epidemic in India. medRxiv. doi.org/10.1101/2020.04.12.20062794.
[13] Sardar, T., Nadim, S.S., Chattopadhyay, J. (2020). Assessment of 21 days lockdown effect in some states and overall India: a predictive mathematical study on covid-19 outbreak. Chaos, Solitons and Fractals, 139: 110078.
[14] Greenhalgh, D., Diekmann, O., de Jong, M.C.M., (2000). Subcritical endemic steady states in mathematical models for animal infections with incomplete immunity. Math. Biosci. 165, 1-25.
[15] Jean, D., Gabriel, T., (2020). Heterogeneous social interactions and the COVID-19 lockdown outcome in a multi-group SEIR model. Math. Modell. Nat. Phenom. 15-36.
[16] Zhai, S., Gao, H., Luo, G., Tao, J., (2021). Control of a multigroup COVID-19 model with immunity: treatment and test elimination. Nonlinear Dyn. 106, 1133-1147.
[17] Santra, P. K.,Ghosh, D., Mahapatra, G. S., Bonyah, E., (2022). Mathematical Analysis of Two Waves of COVID-19 Disease with Impact of Vaccination as Optimal Control. Computational and Mathematical Methods in Medicine, 2684055.
[18] Driessche, V. D., Watmough, J., (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. Math. Biosci. 180(1), 29-48.
[19] Sun, R., (2010). Global stability of the endemic equilibrium of multigroup sir models with nonlinear incidence. Comput. Math. Appl. 60(8), 2286–2291.
[20] Berman, A., Plemmons, R. J., (1979). Nonnegative matrices in the mathematical sciences. Society for Industrial and Applied Mathematics. 150, 55–66.
[21] Nejad Hossein, S.,Heydari, A., (2014). Solving a group of optimal control problems using the combined genetic algorithm. Journal of Operational Research in Its Application (Applied Mathematics)-Lahijan Azad University, 42(3), 125-137. (In Persian).
[22] Moashi sani, F., Haji aghayi keshteli, M., Ghli por konaani, Y., Horsaj , F., (2023). Optimization of the blood supply chain network with the possibility of lateral delivery. Journal of Operational Research in Its Application (Applied Mathematics)-Lahijan Azad University, 74(1), 63-88. (In Persian).
[23] LS. Pontryagin, VG. Boltyanskii, RV. Gamkrelidze, EF. Mishchenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes. New York, NY, USA: Wiley.
(1962).

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/JAMLU-2025-1-2274]