مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال بیست و یکم، شماره دوم (پیاپی ۸۱)،تابستان ۰۳، ص ص ۵۵-۳۵
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

توسعه مدل بهینه مسیریابی وسایل نقلیه ناهمگن با قابلیت برداشت و تحویل هم‌زمان محصولات به مشتریان و تحت محدودیت پنجره زمانی

زهراسادات حسن پور جسری[۱]، عرفان حسن نایبی[۲*]، میلاد ابوالقاسمیان[۳]
۱-استادیار، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران
۲- استادیار، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران
۳-استادیار، گروه مدیریت، مؤسسه آموزش عالی سهروردی، قزوین، ایران

رسید مقاله: ۲۵ شهریور۱۴۰۲
پذیرش مقاله: ۲۵ بهمن ۱۴۰۲

چکیده
این مقاله به بررسی مساله مسیریابی وسایل نقلیه ناهمگن با پنجره زمانی به منظور برداشت و تحویل همزمان محصولات به مشتریان می‌پردازد. در این روش، وسایل نقلیه با سرعت و ظرفیت متفاوت برای تحویل محصولات استفاده شده‌اند. در این تحقیق، مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی با هدف کمینه‌سازی هزینه‌های مسیریابی وسایل نقلیه ناهمگن با درنظرگرفتن پنجره‌های زمانی هزینه برداشت تا تحویل محصول از مراکز مجاز آن به مشتری توسعه داده شده است. با توجه به NP-Hard بودن مساله مسیریابی در ابعاد بزرگ، برای حل این مساله از الگوریتم‌های ابتکاری و فراابتکاری استفاده شده است. براساس نتایج به‌دست آمده، از سه روش فراابتکاری جستجوی محلی تکرارشونده ILS، الگوریتم ترکیبی ژنتیک و الگوریتم جستجوی شبکه متحرک خودکار AGS استفاده شده است. نتایج محاسباتی نشان می‌دهد که کمترین هزینه از طریق اعزام ۶۷ وسیله نقلیه مختلف جهت برداشت و تحویل چندگانه محصول به مشتری از طریق تقسیم شهر تهران به ۱۶ ناحیه حاصل شده است. نتایج تحقیق نشان می‌دهد با اعزام و مسیریابی بهینه این تعداد وسیله نقلیه، مقدار هزینه‌های سیستم لجستیک نسبت به وضعیت موجود ۳۸/۵۸ درصد کاهش پیدا خواهد کرد. بر اساس نتایج محاسباتی، الگوریتم پیشنهادی قادر به مسیریابی بهینه وسایل نقلیه ناهمگن تحت محدودیت پنجره زمانی برای تحویل هم‌زمان محصولات است.

کلمات کلیدی: مسیریابی وسایل نقلیه، بهینه‌سازی ریاضی، برداشت و تحویل هم‌زمان، الگوریتم ژنتیک.

۱ مقدمه
مساله مسیریابی وسایل نقلیه یکی از مهم‌ترین مسایل در حوزه توزیع کالا محسوب می‌شود. بهینه‌سازی مسیریابی وسایل نقلیه موجب کاهش هزینه‌ها و همچنین بهبود کیفیت خدمات به مشتریان خواهد شد. مساله مسیریابی

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: hassannayebi@sharif.edu

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]
[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]

وسایل نقلیه (VRP)[1] توسط دانتزیگ و رامزر در سال ۱۹۵۹ مطرح شده است [۱]. از جمله کاربردهای مساله مسیریابی وسایل نقلیه می‌توان به جمع‌آوری زباله های خانگی و صنعتی، مسیریابی سرویس مدارس، کارمندان و دانشگاهیان، تحویل‌های بانکی و پستی، انتقال نمونه های خون از موسسات پزشکی به آزمایشگاه‌ها، توزیع روزنامه، سرویس‌های رستورانی، حرکت ربات‌ها و جرثقیل‌ها وتوزیع محصولات کارخانه‌ها بین عمده فروش‌ها و خرده‌فروش‌ها اشاره کرد. در عمل محدودیت‌ها و مفروضات جانبی مختلفی وجود دارند که موجب توسعه مساله مسیریابی وسایل نقلیه و شکل‌گیری مدل‌های جدید شده است [۲]. VRP یک عنوان عمومی است که به هر دسته فعالیتی که وسیله نقلیه با مشتری در ارتباط است اطلاق می‌شود. از VRP در مقالات، به‌صورت زمان‌بندی وسایل نقلیه و توزیع وسیله نقلیه یا به‌طور ساده‌تر به صورت مساله تحویل نیز یاد می‌شود. مسیریابی وسیله‌نقلیه، یکی از مفاهیم آشنا در زمینه تحقیق در عملیات است که در دو دهه اخیر تلاش‌ها و به دنبال آن پیشرفت‌های بزرگی در این زمینه انجام شده است [۳]. بنابراین، مسایل VRP به مجموعه‌ای از مسایل گفته می‌شود که در آن ناوگانی متشکل از چندین وسیله نقلیه، از یک یا چند انبار به ارایه خدمت به مشتری‌های مستقر در نقاط مختلف جغرافیایی می‌پردازند و این امر را به نحوی انجام می‌دهند که هزینه‌های انجام این کار به حداقل مقدار ممکن برسد. در طول این مسیرها هر مشتری فقط یک بار ملاقات می‌شود و تمام تقاضاهای آنها تنها توسط یک وسیله نقلیه برآورده می‌شود. هر وسیله دارای ظرفیت معینی است و از سویی تمام مسیرها از یک نقطه مشخص (مبدا بارگیری) شروع شده و پس از این‌که وسیله نقلیه به یک سری مرتب از مشتری‌ها سرویس ارایه داد، به همان نقطه اولیه بر می‌گردد و مسیر در همان مکان شروع، خاتمه پیدا می‌کند [۴]. تقریبا سیکلی دایره مانند که از یه نقطه شروع و در همان نقطه هم تمام می‌شود. این‌گونه مسایل به‌طور کلی به‌عنوان مسایل VRP که به نوعی جز مسایل برنامه‌ریزی حمل‌ونقل تلقی می‌شوند، شناخته می‌شوند. مدل‌ها و الگوریتم‌های معرفی‌شده برای حل مسایل VRP ارایه‌شده، نه تنها برای استفاده در مسایل مربوط به پخش و جمع‌آوری کالاها، بلکه برای بسیاری از مسایل مختلف صنعت حمل و نقل در دنیای واقعی، می‌توانند مورد استفاده قرار بگیرند. به عنوان مثال کاربرد الگوریتم‌های مسیریابی می‌تواند در موضوعاتی نظیر جمع‌آوری زباله‌های خشک، پاکیزه‌سازی خیابان‌ها، مسیریابی اتوبوس مدرسه، سیستم‌های جابه‌جایی معلولین، برنامه‌ریزی واحدهای نگهداری و تعمیرات، تاکسی‌های اینترنتی، شرکت‌های لجستیک و حمل بار باشد [۳-۵]. پخش کالاها که در برگیرنده خدمت‌دهی به دسته‌ای از مشتری‌ها است، در یک بازه زمانی تنظیم‌شده و توسط دسته‌ایی از وسایل‌نقلیه انجام می‌شود که در یک یا چند مرکز قرار می‌گیرند و توسط عده‌ای از رانندگان هدایت می‌شوند. همچنین، جابجایی‌ها باید در یک شبکه مسیر مناسب انجام شود [۶]. علاوه بر این، برای افزایش کیفیت سرویس‌دهی و پاسخ به درخواست‌های مشتری‌های گوناگون، امروزه کارفرمایان به جای استفاده از روش‌های قدیمی، سعی می‌کنند که از روش‌های توزیع موثر و رضایت بخش استفاده کنند. به طور مثال مشتریان ساعت‌های دریافت ترجیحی را ممکن است برای دریافت کالا تغییر دهند و در نتیجه کارفرمایان توزیع‌کننده کالا باید کالاهای خود را در پنجره زمان‌های مختلف تحویل دهند

[1]Vehicle Routing Problem (VRP)

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]

[۷]. مدل‌هایVRPدر حالت‌های کاربردی که در برخی موارد حتی مستقیما با توزیع فیزیکی کالاها مرتبط نیستند، به طور مکرر اتفاق می‌افتند. سوارکردن کودکان به اتوبوس‌های مدرسه، تحویل تولیدات بین سوپرمارکت‌ها و فروشگاه‌های بزرگ، توزیع روزنامه، تورهای بازرسی و تعمیر بازدارنده، توزیع هر گونه کالا یا خدمت و غیره، همگی نمونه‌هایی از مسایل VRP هستند که در آنها، کالاها و خودروها می‌توانند شکل‌های متنوعی داشته باشند [۸]. در ادبیات موضوع اثبات‌شده است که مسایل VRP از نوع NP-Hard هستند [۹،۱۰]. الگوریتم‌های تحقیقاتی ارایه شده برای VRP عموماً شامل روش‌های دقیق و الگوریتم‌های بهینه‌سازی هوشمند هستند. الگوریتم‌های دقیق شامل روش‌های شاخه و کران، شاخه-قیمت-برش و متدهای برنامه‌ریزی پویا هستند. در مقابل، الگوریتم‌های تقریبی عمدتاً شامل روش‌های جست‌وجوی ممنوع و شبیه‌سازی تبرید، الگوریتم‌های ژنتیک، بهینه‌سازی مورچگان و غیره است.

براساس موارد اشاره‌شده در بالا، در تحقیق حاضر یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی با هدف کمینه‌سازی مجموع هزینه‌های مسیریابی وسایل نقلیه ناهمگن و با درنظرگرفتن پنجره‌های زمانی هزینه برداشت (جمع‌آوری)[1] تا تحویل[2] محصول از مراکز مجاز به مشتری توسعه داده شده است. با به‌کارگیری مدل فوق در یک مطالعه موردی واقعی برای مشتریان یک خرده فروشی آنلاین در کشور، ابتدا مدل ریاضی توسعه داده شده در محیط نرم افزار GAMS فرمول‌بندی شده است و سپس با ابزار CPLEX حل شده است. با حل مدل در ابعادهای کوچک، متوسط و بزرگ مشخص شده است که مدل ریاضی قادر به حل نمونه‌های عددی بزرگ نمی‌باشد؛ بنابراین، با به‌کارگیری روش فراابتکاری و بررسی قابلیت مدل پیشنهادی با به‌کارگیری آن نتایج لازم برای نمونه‌ها با ابعاد بزرگ نیز حاصل گردیده است.

ادامه مقاله به شرح زیر سازماندهی می‌شود. در بخش دوم، یک مرور ادبیات ارایه شده است. در بخش سوم روش پیشنهادی تحقیق که شامل معرفی مدل‌سازی ریاضی است ارایه شده است. در بخش چهارم، نتایج تحقیق ارایه‌شده است و سرانجام در بخش پنجم یک نتیجه‌گیری کلی به همراه پیشنهاد تحقیقات آتی ارایه شده است.

۲ مرور ادبیات

مساله VRP یکی از مسایل مهم در مدیریت زنجیره تامین است که در آن تعدادی خودرو متمرکز در یک یا چند قرارگاه (انبار یا گره) باید به تعدادی از مشتری‌ها مراجعه کرده و به آنها خدمتی را ارایه بدهند که هر یک دارای درخواستی معین هستند [۱۱]. این مساله درصدد است تا با استفاده از مدل‌های ریاضی و بهینه‌سازی مسیر به گونه‌ای عمل کند که مسافت طی شده، زمان کل سفر، تعداد وسایل حمل و نقل، جریمه‌های دیرکرد و در نهایت تابع هزینه حمل و نقل حداقل گردد و در نتیجه رضایت مشتری‌ها به حداکثر مقدار خود برسد. برای مثال، نیرا و همکاران [۱۲]، یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح برای مساله مسیریابی وسیله نقلیه چند سفره با پنجره زمانی با فرض وابستگی زمان بارگیری به نوع سرویس و مدت زمان سفر (MTVRPTW-SDLT)[3] ارایه دادند. اولین

[1] Pick-up
[2] Delivery
[3] Multi-trip vehicle routing problem with time windows, service-dependent loading times, and limited trip duration

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]
[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]

مدل ارایه‌شده در این مقاله، بازگشت وسیله نقلیه به انبار را مدل‌سازی می‌کند. برای حل مساله از روش قطعی استفاده شده است. هوانگ و همکاران [۱۳]، یک مدل برای مساله مسیریابی وسایل نقلیه چند سفره با پنجره‌های زمانی (MTVRPTW)[1] را معرفی کرده‌اند. در مدل ارایه‌شده وسایل نقلیه محموله‌های جمع‌آوری‌شده از مشتریان را در انباری که ظرفیت تخلیه محدودی دارد، تخلیه می‌کنند. برای حل مساله یک الگوریتم حل مبتنی بر شاخه و قیمت و برش (PBC)[2] نیز پیشنهاد شده است.

رضایی و همکاران [۳]، یک مدل چندهدفه برای مساله مسیریابی وسایل نقلیه چندگانه (MO-MVRP)[3] در شرایط بحرانی برای خون رسانی به مصدومان ارایه کرده‌اند. در این مدل ارایه‌شده مدت زمان رسیدن وسایل نقلیه و مقدار خون جمع‌آوری‌شده توابع هدف مساله در نظر گرفته شده‌اند. برای حل مدل پیشنهادی از حل قطعی CPLEX استفاده شده است. ونگ و همکاران [۱۴] در این مطالعه یک مساله مسیریابی خودرو چند انباری مشترک با تقاضاهای مشتری به صورت پویا و پنجره‌های زمانی (CMVRPDCDTW)[4] را با در نظر گرفتن اشتراک منابع (RS)[5] و الزامات پویای مشتریان را معرفی می‌کنند. برای این منظور، یک مدل بهینه‌سازی دو هدفه برای بهینه‌سازی مسیرهای وسایل نقلیه در حالی که هزینه عملیاتی کل و تعداد وسایل نقلیه را به حداقل می‌رساند، ساخته شده است. برای حل مدل پیشنهادی یک الگوریتم ترکیبی متشکل از الگوریتم خوشه‌بندی k-medoids بهبودیافته و بهینه‌سازی ازدحام ذرات چند هدفه برای یافتن جواب های نزدیک به بهینه ارایه شده است. حسن پور و همکاران [۱۵]، یک مساله مسیریابی وسیله نقلیه باز چند سفری (MTOVRP)[6] را فرموله کرده‌اند. برای این منظور، یک مدل برنامه نویسی عدد صحیح مناسب برای به حداقل رساندن کل هزینه‌های خریداران فرموله‌شده است. برای حل مدل یک الگوریتم مبتنی بر تجزیه ارایه شده است که مساله را به دو بخش تقسیم می‌کند. در مرحله اول، تصمیمات تاکتیکی در مورد انتخاب تامین‌کننده و نوع همکاری اتخاذ می شود. در مرحله دوم، توالی بازدید هر وسیله نقلیه مشخص می‌شود. نوذری و همکاران [۱۶]، یک مدل مسیریابی چندانباری (MDVRP)[7] تحت عدم قطعیت ارایه داده اند. هدف اولیه مدل پیشنهادی، مکان یابی انبارها و مراکز تولید و مسیریابی وسایل نقلیه برای توزیع کالاهای پزشکی به بیمارستان ها است. برای حل این مدل یک روش فازی استوار با پارامترهای نامعین مانند هزینه های تقاضا، انتقال و توزیع استفاده شده است. اثر عدم قطعیت با استفاده از روش برنامه‌ریزی فازی نوتروسوفیک مورد بررسی قرار گرفته است. ژیائو و همکاران [۱۷]، یک الگوریتم مسیریابی خودروی چند مرحله‌ای مبتنی بر گروه‌بندی وظایف (MSVR-TG)[8] برای مساله مسیریابی وسیله نقلیه نجات با محدودیت انرژی در بلایای طبیعی پیشنهاد کرده‌اند. برای حل مساله یک الگوریتم ابتکاری مبتنی بر خوشه‌بندی k-means و الگوریتم ژنتیک ارایه داده‌اند. کریمی و فردوس [۱۸]، در این مطالعه یک مساله مسیریابی وسیله نقلیه با پنجره های زمانی در نظر گرفته شده است که در آن هر کامیون دارای ظرفیت متغیری است. در این مدل، هر وسیله

[1] Multi-trip vehicle routing problem with time windows (MTVRPTW)
[2] Branch-price-cut
[3] Multi Objective-Multiple vehicle routing problem (MO-MVRP)
[4] Collaborative multi-depot vehicle routing problem with dynamic customer demands and time windows (CMVRPDCDTW)
[55] Resource Sharing (RS)
[6] Multi-Trip Open Vehicle Routing Problem (MTOVRP)
[7] Multi-depot Vehicle routing problem (MDVRP)
[8] Multi-stage vehicle routing algorithm based on task grouping (MSVR-TG)

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]

نقلیه می‌تواند یک یا چند واگن حمل نماید. مشتریان در بازه های زمانی مشخص بازدید می‌شوند و وسایل نقلیه نیز می‌توانند چندین سفر داشته باشند. در این مقاله یک برنامه‌ریزی ریاضی ارایه شده است که با استفاده از الگوریتم شاخه و قیمت حل شده است. مردانه و همکاران [۱۹] در این مقاله، یک مساله برنامه‌ریزی تامین دوره‌ای کشتی در نظر گرفته شده است که در آن تقاضاهای هفتگی در چندین تاسیسات دریایی با ناوگانی از کشتی‌های ناهمگن برآورده می‌شود. هدف برنامه‌ریزی ارایه‌شده یافتن ترکیب بهینه ناوگان و سفرهای هفتگی برای کشتی‌هاست که کل سفر و هزینه‌های ثابت را به حداقل برساند. برای حل مساله برنامه‌ریزی تامین دوره‌ای کشتی، یک الگوریتم شاخه و قیمت پیشنهاد شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که رویکرد پیشنهادی می‌تواند راه‌حل‌هایی با کیفیت بالا برای نمونه‌های مساله بزرگ در مقیاس صنعتی ایجاد کند. هی و همکاران [۲۰]، در این مقاله یک سیستم حمل و نقل عمومی روستایی جدید را معرفی می‌کنند که قادر است خدمات مسافری و باری را یکپارچه نماید. این رویکرد قادر است هزینه های لجستیکی را کاهش دهد و درآمد اضافی برای اپراتور حمل و نقل ایجاد می‌کند. بنابراین، هدف به حداقل رساندن هزینه برای کاربر و اپراتور حمل و نقل با استفاده از یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط فرموله شده است که می تواند مسیریابی اتوبوس و برنامه‌ریزی سفر اتوبوس را برای چندین محل روستایی انجام دهد. مدل توسعه داده شده با استفاده از ابزار Gurobi در نمونه‌های عددی کوچک مورد استفاده قرار گرفته است و برای حل مساله در ابعاد بزرگ از روش فراابتکاری جستجوی ممنوعه استفاده شده است. نتایج تحقیق نشان می‌دهد که چگونه می‌توان تعداد اتوبوس‌های برقی روستایی را به طور بهینه طراحی کرد تا هزینه‌های خرید و نگهداری آنها کاهش یابد.

جدول ۱. طبقه‌بندی مقالات مرتبط

نام مؤلف	سال انتشار	شماره منبع	نام مدل	تابع هدف		دوره زمانی		پارامترهای مدل		محدودیت ظرفیت	روش حل
				تک هدفه	چندهدفه	یگانه	چندگانه	قطعی	غیرقطعی		
نیرا و همکاران	۲۰۲۰	[۱۲]	MTVRPTW-SDLT	*	–	*	–	*	–	–	ابتکاری
هوانگ و همکاران	۲۰۲۱	[۱۳]	MTVRPTW	*	–	–	–	*	–	*	BPC
رضایی و همکاران	۲۰۲۱	[۳]	MO-MVRP	–	*	*	–	*	–	–	CPLEX
ونگ و همکاران	۲۰۲۲	[۱۴]	CMVRPDCDTW	–	*	*	–	*	–	–	ابتکاری
حسن پور و همکاران	۲۰۲۲	[۱۵]	MTOVRP	*	–	*	–	*	–	–	ابتکاری
نوذری و همکاران	۲۰۲۲	[۱۶]	MDVRP	–	*	*	–	*	–	–	فازی نوتروسوفیک

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]

ژیائو و همکاران	۲۰۲۲	[۱۷]	MSVR-TG	*	-	*	-	*	-	*	-
کریمی و فردوس	۲۰۲۲	[۱۸]	VRPTW	*		*		*		*	BPC
هو و همکاران	۲۰۲۳	[۲۱]	CMTVRPTW		*	*		*		-	BPC
این تحقیق	۲۰۲۴	-	HG-VRP-TW-PD	*			*	*		-	قطعی و فراابتکاری

هو و همکاران [۲۱] مساله مسیریابی وسیله نقلیه چند سفری ظرفیت‌دار با پنجره‌های زمانی (CMTVRPTW)[1] و استفاده از آن در سناریوهای مختلف را بررسی کرده‌اند. برای حل این مساله، یک الگوریتم جدید شاخه و قیمت و برش بر اساس مدل پیشنهاد شده است. براساس مطالعات اشاره‌شده در بالا، در جدول ۱، طبقه‌بندی ادبیات مربوطه انجام شده است. با توجه به طبقه‌بندی انجام‌شده در جدول ۱، مهم‌ترین شکاف تحقیق شناسایی می‌شود. بر این اساس ارایه یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی برای مسیریابی وسایل نقلیه که از طیف‌های گوناگونی می‌باشند در یک پنجره زمانی با در نظر گرفتن قابلیت تحویل و برداشت هم‌زمان به مشتریان در مطالعات قبلی مشاهده نمی شود.

۳ روش تحقیق

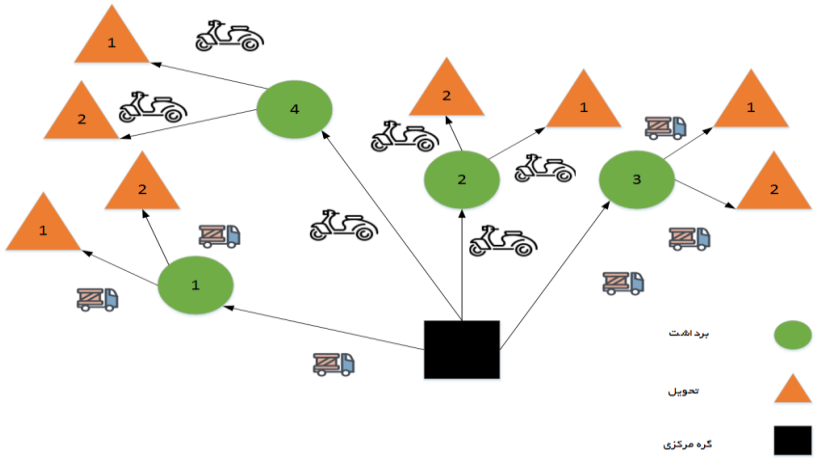
در این بخش از تحقیق به جزییات مربوط به مدل‌سازی ریاضی مساله و روش حل آن پرداخته می‌شود. برای این منظور، ابتدا مجموعه‌ها، پارامترها، متغیرها، محدودیت‌ها و توابع هدف معرفی می‌شوند. در این تحقیق یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی برای مساله مسیریابی با قابلیت تحویل و برداشت هم‌زمان توسعه داده شده است. این مدل برای حالتی است که وسیله نقلیه از هاب شروع حرکت کرده و سفارشاتی را که باید توسط مراکز توزیع به مشتریان مربوطه توزیع شوند تحویل داده و به طور هم‌زمان سفارشاتی که باید از مراکز توزیع جهت انجام پردازش‌ها و تفکیک سازی به هاب فرستاده شود، جمع‌آوری می‌کند. در شکل ۱ ساختار برداشت و تحویل هم‌زمان محصولات نشان داده شده است.

به طور کلی، ساختار تشکیل‌شده برای مدل دارای مفروضات زیر است که عبارت‌اند از:

- هر گره به عنوان مرکز توزیع DC[2] یک بار فقط بازدید می‌شود و در این بازدید عملیات جمع‌آوری محصولات و توزیع محصولات به صورت هم‌زمان توسط تنها یک وسیله نقلیه صورت می‌گیرد (حالت اول).

[1] Capacitated Multi-Trip Vehicle Routing Problem with Time Windows (CMTVRPTW)
[2] Distribution center

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]
[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]



شکل ۱. نمایی از شکل برداشت و تحویل همزمان با وسایل نقلیه ناهمگن (دایره: برداشت، مثلث: تحویل)

- لزومی به بازدید یک باره گره DC جهت جمع‌آوری و توزیع محصولات نیست. به بیان بهتر ممکن است عملیات توزیع به DC توسط یک وسیله نقلیه و عملیات جمع‌آوری توسط وسیله نقلیه دیگر صورت بگیرد. هم چنین ممکن است بسته به ظرفیت وسایل نقلیه، عملیات توزیع و بخشی از عملیات جمع‌آوری توسط یک وسیله نقلیه و میزان باقیمانده جمع‌آوری توسط وسیله نقلیه دیگر صورت بگیرد که در این صورت با حالت ارسال بسته‌های یک سفارش به چندین مقصد[1] روبه‌رو می‌شویم. به عبارت دیگر، در این روش، بسته‌های یک سفارش به دو یا چند بخش تقسیم‌شده و به آدرس‌های مختلفی ارسال می‌شوند. این روش برای کاهش هزینه‌های حمل و نقل و بهبود تجربه مشتریان استفاده می‌شود (حالت دوم).
- تمام DCها برای عملیات توزیع توسط وسایل نقلیه بازدید می‌شوند و سپس به همان ترتیبی که DCها بازدید شده‌اند، عملیات جمع‌آوری سفارشات از آنها انجام می‌شود (حالت سوم).
- مجموع سفارشات جمع‌آوری از DCها حداکثر به اندازه مجموع سفارشات برای توزیع به DCها است.
- مجموع سفارشات جمع‌آوری از DCها بیشتر از مجموع سفارشات برای توزیع به DCها است.

در نظر گرفتن مفروضات فوق باعث می‌شود تا سه حالت برای مدل‌سازی در نظر گرفته شود که در ادامه نحوه مدل‌سازی مربوطه شرح داده می‌شود. اما پیش از آن لازم است نمادگذاری مربوط به مدل‌سازی تحقیق اعم از معرفی مجموعه‌ها، پارامترها و متغیرها شرح داده شود.

الف) مجموعه‌ها:

I: مجموعه نقاط مراکز توزیع DC، $I = 1,\ldots,i$

V: مجموعه کلیه نقاط (مراکز توزیع و گره هاب)، $V = 1,\ldots,v$

A: مجموعه کمان‌ها، $A = 1,\ldots,a$

K: مجموعه وسایل نقلیه، $K = 1,\ldots,k$

[1] Split Delivery

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]

ب) پارامترها:

$[e_i, l_i]$: پنجره زمانی حضور وسیله نقلیه در گره DC_i

Qv^k: ظرفیت حجمی وسیله نقلیه k

Qw^k: ظرفیت وزنی وسیله نقلیه k

α^k: ضریب عملکرد راننده وسیله نقلیه k از منظر آشنایی با مسیرها

c_{ij}: فاصله بین گره i و گره j

dv_i: میزان حجم سفارشات متناظر با DC_i

dw_i: میزان وزن سفارشات متناظر با DC_i

p_i: تعداد سفارش‌هایی که باید از DC_i جمع‌آوری شود.

d_i: تعداد سفارش‌هایی که باید DC_i تحویل داده شود.

ج) متغیرهای تصمیم‌گیری:

متغیرهای تصمیم‌گیری در این تحقیق بر دو نوع صفر و یک و پیوسته طبقه‌بندی شده‌اند.

- **متغیر صفر و یک**

x_{ij}^k: متغیر صفر و یک؛ مقدار یک خواهد داشت اگر وسیله نقلیه k از گره i به گره j برود. در غیر این‌صورت برابر صفر است.

- **متغیرهای پیوسته**

z_{pi}^k: میزان محصولات جمع‌آوری شده گره i توسط وسیله نقلیه k

z_{di}^k: میزان محصولات قابل تحویل به گره i توسط وسیله نقلیه k

s_i^k: زمان رسیدن وسیله نقلیه k موقع ورود به گره i

L_i^k: حد بالای بار وسیله نقلیه k موقع ورود به گره i

h_i^k: میزان بارگیری (تحویل) وسیله نقلیه k هنگام بازدید به گره i

د-۱) مدل‌سازی مربوط به جمع‌آوری سفارشات و تحویل هم‌زمان از DCها

$$Min \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K}\alpha^k c_{ij}x_{ij} + \sum_{k\in K}\sum_{j} Fixed\cos t^k x_{1j}^k \qquad (۱)$$

s.t.

$$\sum_k\sum_j x_{ij}^k = 1 \qquad \forall i \in I \qquad (۲)$$

$$L_i^k + h_i^k + Mx_{ij}^k \le M + L_j^k \qquad \forall k \qquad (۳)$$

$$h_i^k = p_i - d_i \qquad \forall k \qquad (۴)$$

$$h_1^k = 0 \qquad \forall k \qquad (۵)$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]

$$L_i^k \le Qv^k \qquad \forall k \qquad (۶)$$

$$L_i^k \le Qw^k \qquad \forall k \qquad (۷)$$

$$\sum_j x_{\backslash j}^k \le ۱ \qquad \forall k \qquad (۸)$$

$$\sum_i x_{ih}^k - \sum_j x_{hj}^k = ۰ \qquad \forall h \in I, \forall k \qquad (۹)$$

$$u_i^k - u_j^k + N * x_{ij}^k \le N - ۱ \qquad \forall i, j : i \ne j, i, j \ge ۲ \qquad (۱۰)$$

$$e_i \sum_i x_{ih}^k \le s_i^k \le l_i \sum_i x_{ih}^k \qquad \forall h \in I, \forall k \qquad (۱۱)$$

$$x_{ij}^k \in \{۰,۱\} \qquad \forall i, j, k \qquad (۱۲)$$

تابع هدف (۱) به کمینه کردن میزان کل مسافت طی‌شده و همچنین کمینه کردن هزینه استفاده از وسایل نقلیه می‌پردازد. محدودیت (۲) بیانگر آن است که هر گره DC یک و فقط یک بار برای جمع‌آوری بازدید می‌شود. محدودیت (۳) به اصلاح میزان بار هر وسیله نقلیه هنگام گذر از گره i به گره j می‌پردازد. محدودیت (۴) نیز مطابق تعریف h_i^k میزان بارگیری هر وسیله نقلیه را هنگام ورود به گره i نشان می‌دهد. محدودیت (۵) نشان‌گر آن است که گره هاب (گره ۱) نه جمع‌آوری دارد و نه توزیع. محدودیت‌های (۶) و (۷) نیز مربوط به محددویت حجمی و وزنی وسیله نقلیه k می‌باشند. محدودیت‌های (۳) و (۴) بیانگر محدویت ظرفیت حجمی و وزنی وسایل نقلیه هستند. در واقع با توجه به فرض مدل که عملیات جمع‌آوری و توزیع به هر گره DC یکباره و توسط یک وسیله نقلیه انجام می‌شود، پس در ابتدای حرکت، ماشین از هاب با ظرفیت کامل جهت توزیع سفارشات به DC حرکت می‌کند. از سوی دیگر میزان بار جمع‌آوری شده از DC نیز نباید از ظرفیت ماشین تجاوز کند. محدودیت (۸) تضمین‌کننده آن است که هر وسیله نقلیه در صورت استفاده فقط یک بار می‌تواند از هاب خارج شود (لازم به توضیح است گره ۱ متناظر با گره هاب در شبکه است). رابطه (۹) بیانگر محدویت جریان است؛ بدین معنا که وسیله نقلیه بعد از ورود به یک گره باید از آن خارج شود. محدودیت (۱۰) از ایجاد زیرتور نیز جلوگیری می‌کند. محدودیت (۱۱) تضمین‌گر رسیدن وسیله نقلیه k در پنجره زمانی قابل قبول DC_i می‌باشد. در نهایت، محدودیت شماره (۱۲) نشان‌دهنده علامت متغیرهای تصمیم می‌باشند.

د-۲) مدل‌سازی مربوط به تحویل سفارش به چندین مقصد و برداشت سفارش از چند مبدا:

مکن است عملیات توزیع به DC توسط یک وسیله نقلیه و عملیات جمع‌آوری توسط وسیله نقلیه دیگر صورت بگیرد. هم چنین ممکن است بسته به ظرفیت وسایل نقلیه عملیات توزیع و بخشی از عملیات جمع‌آوری توسط یک وسیله نقلیه و میزان باقیمانده جمع‌آوری توسط وسیله نقلیه دیگر صورت بگیرد (حالت split delivery).

$$Min \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k\in K} \alpha^k c_{ij} x_{ij} + \sum_{k\in K} \sum_j Fixed\cos t^k x_{\backslash j}^k \qquad (۱۳)$$

s.t.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]

$$\sum_{\substack{j \neq i \\ j \in V'}} x_{ij}^{k} = \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in V'}} x_{ji}^{k} = y_i^{k} \qquad \forall i \in I \ , \forall k \in K \qquad (۱۴)$$

$$\sum_{k \in K} z_{pi}^{k} = p_i \qquad \forall p \in P \ , \forall d \in D \qquad (۱۵)$$

$$\sum_{k \in K} z_{qi}^{k} = q_i \qquad \forall p \in P \ , \forall d \in D \qquad (۱۶)$$

$$\sum_{i} z_{pi}^{k} \leq Qv^{k} \qquad \forall p \in P \ , \forall d \in D \qquad (۱۷)$$

$$\sum_{i} z_{qi}^{k} \leq Qv^{k} \qquad \forall p \in P \ , \forall d \in D \qquad (۱۸)$$

$$z_{pi}^{k} \leq p_i y_i^{k} \qquad \forall p \in P \ , \forall d \in D \qquad (۱۹)$$

$$z_{qi}^{k} \leq q_i y_i^{k} \qquad \forall p \in P \ , \forall d \in D \qquad (۲۰)$$

$$y_i^{k}, x_{ij}^{k} \in \{۰,۱\}, z_{pi}^{k}, z_{qi}^{k} \geq ۰ \qquad \forall i \in V \ , \forall j \in V \ , i \neq j, k \in K, i, j \geq ۲ \qquad (۲۱)$$

تابع هدف (۱۳) به کمینه سازی هزینه‌های سفر و هزینه ثابت وسایل نقلیه می‌پردازد. محدودیت (۱۴) بیانگر آن است که هر وسیله نقلیه به یک گره DC که وارد می‌شود باید از آن خارج شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود محدودیتی برای تعداد بازدید گره DC توسط وسایل نقلیه مختلف وجود نداشته و یک DC ممکن است توسط بیش از یک وسیله نقلیه بازدید شود. محدودیت (۱۵) بیانگر آن است تمام سفارشات جمع‌آوری‌شده هر DC جمع‌آوری می‌شود و به طور مشابه محدودیت (۱۶) تضمین‌گر آن است که تمام سفارشات هر DC به آن توزیع داده می‌شود. دو محدودیت (۱۷) و (۱۸) نیز بیانگر محدودیت ظرفیت وسایل نقلیه است که در آن میزان کل بارهای جمع‌آوری‌شده و توزیع‌شده توسط یک وسیله نقلیه از ظرفیت مجاز وسیله بیشتر نمی‌شود. محدودیت‌های (۱۹) و (۲۰) نیز نشانگر آن است که جمع‌آوری سفارشات (و یا توزیع سفارشات) به یک گره DC توسط یک وسیله نقلیه خاص تنها در صورتی امکانپذیر است که آن گره DC توسط آن وسیله نقلیه بازدید شده باشد. درنهایت محدودیت (۲۱) دامنه متغیرهای تصمیم‌گیری را نشان می‌دهد.

د-۳) مدل‌سازی مسیریابی وسایل نقلیه باز و باز-بسته ترکیبی

در حالت اول مسیریابی وسایل نقلیه باز با توجه به این‌که ترتیب بازدید DCها برای جمع‌آوری به همانی ترتیبی است که برای توزیع بازدید شده‌اند، مساله به یک مساله مسیریابی وسایل نقلیه باز تبدیل می‌شود که مدل‌سازی آن در ادامه بیان شده است.

$$Min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} \alpha^{k} c_{ij} x_{ij} + \sum_{k \in K} \sum_{j} Fixed \cos t^{k} x_{۱j}^{k} \qquad (۲۲)$$

s.t.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]

$$\sum_{k\in K}\sum_{i} x_{ij}^{k} = ۱ \qquad \forall j = ۲,...,n \qquad (۲۳)$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{i} x_{ij}^{k} \le ۱ \qquad \forall j = ۲,...,n \qquad (۲۴)$$

$$\sum_{i} dv_{i} \sum_{j} x_{ij}^{k} \le Qv^{k} \qquad \forall k \in K \qquad (۲۵)$$

$$\sum_{i} dw_{i} \sum_{j} x_{ij} \le Qw^{k} \qquad \forall k \in K \qquad (۲۶)$$

$$\sum_{j=۲} x_{۱j} \le ۱ \qquad \forall k \qquad (۲۷)$$

$$\sum_{j=۲} x_{۱j} = ۰ \qquad \forall k \qquad (۲۸)$$

$$\sum_{i} x_{iu}^{k} - \sum_{i} x_{ui}^{k} \le ۱ \qquad \forall u = ۱,...,n; \forall k \qquad (۲۹)$$

$$x_{ij}^{k} \in \{۰,۱\} \qquad \forall i, j, k \qquad (۳۰)$$

تابع هدف (۲۲) به کمینه کردن میزان کل مسافت طی‌شده و همچنین کمینه کردن هزینه استفاده از وسایل نقلیه می‌پردازد. محدودیت (۲۳) بیانگر آن است که هر DC یک بار بازدید می‌شود. با توجه به مدل مسیریابی باز براساس محدودیت (۲۴)، هر گره حداکثر یک خروجی می‌تواند داشته باشد.

محدودیت‌های (۲۵) و (۲۶) به ترتیب به بیان ظرفیت حجمی و وزنی وسایل نقلیه می‌پردازند. نامعادله (۲۷) تضمین‌کننده آن است که هر وسیله نقلیه در صورت استفاده فقط یک بار می‌تواند از هاب خارج شود. محدودیت (۲۸) نشان می‌دهد که گره هاب اصلی تنها نقش گره اعزام‌کننده وسیله نقلیه را داشته و جریانی به آن وارد نمی‌شود (مسیریابی باز). رابطه (۲۹) بیانگر محدویت جریان برای هر گره و هر وسیله نقلیه است است. در نهایت، محدودیت شماره (۳۰) نشان‌دهنده نوع متغیرهای تصمیم می‌باشند.

در حالت مسیریابی وسایل نقلیه باز با توجه به میزان سفارشات توزیع، تعداد کافی وسایل نقلیه از هاب به سمت مراکز توزیع جهت توزیع سفارشات ارسال می‌شوند. با توجه به اینکه در حالت مسیریابی وسایل نقلیه باز- بسته فرض شده میزان سفارشات برای جمع‌آوری از DCها بیشتر از میزان سفارشات توزیع آنها است، پس تعداد بیشتری وسایل نقلیه (نسبت به حالت توزیع) مورد نیاز خواهد بود. بنابراین به منظور کاهش هزینه‌ها، جلوگیری از برگشت خالی کامیون و همچنین افزایش کارایی، ماشین‌هایی که در انتهای مسیر توزیعشان بوده و تمامی DCهای در نظر گرفته‌شده در مسیر خود را بازدید کرده‌اند، به عنوان یک ماشین فعال در نظر گرفته و با توجه به موقعیت جغرافیایی مختلف وسایل نقلیه به ارایه یک مدل مسیریابی وسایل نقلیه با انبار چندگانه[۱] برای جمع‌آوری سفارشات می‌پردازیم. به بیان بهتر هر ماشین پس از تحویل محصولات آخرین مرکز توزیع خود می تواند از همان نقطه به جمع‌آوری سفارشات از مراکز توزیع بپردازد. گفتنی است بسته به میزان تقاضای جمع‌آوری می‌توان از ماشین‌هایی که در هاب اصلی نیز مستقر هستند استفاده شود.

[۱] Multi-depot VRP

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]

لذا در گام نخست، مساله توزیع به DCها حل‌شده و سپس آخرین نقطه بازدید هر وسیله نقلیه ثبت‌شده و سپس در یک مدل مدل مسیریابی وسایل نقلیه با انبار چندگانه برای جمع‌آوری سفارشات استفاده می‌شود که نقطه آغازین وسایل نقلیه همان آخرین DCهای بازدید شده بوده و نقطه اتمام تمامی آنها هاب می‌باشد. در ادامه مدل مربوط به مدل مسیریابی وسایل نقلیه با انبار چندگانه برای جمع آوری سفارشات توضیح داده می‌شود. با توجه به آنکه وسایل نقلیه‌ای که در مراکز توزیع مستقر هستند تا سفارشات مرکز خود و سایر DCها را جمع‌آوری کنند، پس مسیر حرکت این نوع وسایل نقلیه یک مسیر باز بوده که از یک DCمشخص شروع می‌شود و در نهایت به هاب ختم می‌گردد. سایر وسایل نقیه که مبدا حرکت آنها هاب است، مسیرشان بسته است که پس از بازدید تعدادی DCبرای جمع‌آوری محصولات در نهایت به هاب بر می‌گردند. بنابراین مشاهده می‌شود که مساله در این حالت از نوع تلفیقی مسیر باز و بسته است که در مقالات نخستین بار در سال ۲۰۱۲ توسط لیو و ژانگ معرفی شد [۱۶]. در ادامه به معرفی مدل تحت عنوان مسیریابی وسایل نقلیه باز-بسته برای حالت دوم می‌پردازیم.

$$Min \sum_{k\in K}\sum_{j} Fixed\ cost^k x^k_{\cdot j} + \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K} c_{ij} x^k_{ij} - \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K} c_{i\cdot} x^{1}_{i\cdot} \qquad (۳۱)$$

$$s.t.$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{i} x^{k}_{ij} = 1 \qquad \forall j \qquad (۳۲)$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{i} x^{k}_{ij} = \sum_{k\in K}\sum_{i} x^{k}_{ji} \qquad \forall j \qquad (۳۳)$$

$$L^k_i + q_j - (1 - x^k_{ij})M \le L^k_j \qquad \forall j \qquad (۳۴)$$

$$q_i \le L^k_i \le \sum_{k\in K}\sum_{j} x^{k}_{ji} Qv^k \qquad \forall j \qquad (۳۵)$$

$$q_i \le L^k_i \le \sum_{k\in K}\sum_{j} x^{k}_{ji} Qw^k \qquad \forall j \qquad (۳۶)$$

$$\sum_{j} x^{1}_{\cdot j} \le |K| \qquad \forall j \qquad (۳۷)$$

$$x^k_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall j \qquad (۳۸)$$

تابع هدف (۳۱) به کمینه کردن میزان کل مسافت طی‌شده و همچنین کمینه کردن هزینه استفاده از وسایل نقلیه می‌پردازد. محدودیت (۳۲) بیانگر آن است که هر DC یک و فقط یک بار بازدید می‌شود. محدودیت (۳۳) معادله تعادل جریان در گره است. تضمین می‌کند که تمام جریانات ورودی از گره نیز خارج می‌شوند. محدودیت (۳۴) از ایجاد زیر تور برای هر وسیله نقلیه جلوگیری می‌کند. محدودیت‌های (۳۵) و (۳۶) به ترتیب به بیان ظرفیت حجمی و وزنی وسایل نقلیه می‌پردازند. محدودیت (۳۷) بیانگر تعداد کل وسیله نقلیه است که از هاب می‌تواند حرکت کند. در نهایت، محدودیت شماره (۳۸) نشان دهنده نوع متغیرهای تصمیم می‌باشند.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]

۳-۱ رویکرد حل مساله: معرفی یک روش ابتکاری

در این بخش از تحقیق به معرفی روش حل مساله می‌پردازیم. عموما در حل مساله VRP از الگوریتم‌های فراابتکاری نظیر جستجوی ممنوعه و شبیه‌سازی بازپخت استفاده شده است [۱۹]. بیشتر الگوریتم‌های فراابتکاری به‌کاررفته در مسایل ابعاد بزرگ VRP مبتنی بر مدلسازی مساله بر مبنای مدل جریان شبکه[1] و اعمال الگوریتم فراابتکاری جستجوی ممنوعه بوده است. همچنین، لازم به ذکر است تنظیم پارامترهای اولیه از معضلات الگوریتم‌های فراابتکاری است که در عملیات روزانه مسیریابی ممکن است چالش هایی از جمله دام بهینه محلی و طولانی شدن زمان محاسباتی را به همراه داشته باشد. بیشتر رویکردهای حل مطرح‌شده برای مسایل VRP با ابعاد خیلی بزرگ مبتنی بر روش‌های ابتکاری است. دو نوع از کاراترین الگوریتم‌های ابتکاری پیشنهادی در این حوزه الگوریتم هیبریدی ژنتیک[2]، ارایه‌شده در سال ۲۰۱۳، و الگوریتم جستجوی محلی تکرارشونده[3]، ارایه‌شده در سال ۲۰۱۳، بوده است. اخیرا، رویکردهای جدیدی مبتنی بر هرس کردن[4] توسعه داده شده‌اند که تلاش می‌کنند با کاهش تعداد جستجوی عملی، جواب مناسبی را در زمان قابل قبول ارایه دهند. در بیان کلی در بیشتر این تکنیک‌های هرس کردن، به جای ذخیره جدول فاصله $n \times n$ (n: تعداد مشتریان) که فاصله بین هر جفت گره را نشان می‌دهد، برای هر گره تنها فاصله نقاطی که در همسایگی و نزدیکی آن نقطه هستند، ذخیره می‌شود. عملکرد یکی از الگوریتم‌های مبتنی بر رویکرد هرس بنام (A-G-S) در این مطالعه در مقایسه با سایر روش‌های ابتکاری نشان داده شده است. با توجه به شباهت الگوریتم مسیریابی مطالعه موردی در این تحقیق به شرکت‌های تحویل کالا نظیر FedEx، با توجه به حجم بالای سفارشاتی که به FedEx داده می‌شود، تعیین مسیر بهینه مشکل ساز است. اگرچه نکته‌ای که باید به این توجه داشت آن است که براساس اظهارات FedEx فاصله بین نقاط برداشت یا تحویل نزدیک به یکدیگر است. همین امر سبب شده است که FedEx کل شهر را به زیر ناحیه‌های کوچک‌تری تقسیم‌بندی کرده و هر زیرناحیه به یک راننده تخصیص نماید؛ این نوع تخصیص منجر به آشنایی راننده به منطقه خاص و مشتریان خاص آن منطقه‌شده و بدین ترتیب خدمت‌دهی به مشتری در زمان کوتاه‌تر و با کارایی بالاتر صورت می‌گیرد. بنابراین با الگوبرداری از FedEx ما نیز در این تحقیق با تقسیم‌بندی تهران به ۱۶ ناحیه به اجرای الگوریتم برداشت و تحویل FedEx می‌پردازیم.

۳-۱-۱ مدل ریاضی برای خوشه‌بندی محدودیت تعداد مشتریان در گره

در این بخش از تحقیق به نحوه خوشه‌بندی تعداد مشتریان در هر گره در این تحقیق می‌پردازیم. به منظور غلبه بر محدودیت تعداد مشتریان در هر گره یک مدل ریاضی پیشنهاد می‌شود که ساختار آن در ادامه معرفی شده است.

- **متغیرهای تصمیم‌گیری**

y_{ik}: اگر مشتری i به خوشه k تخصیص داده شود مقدار یک به خود می‌گیرد، در غیر این صورت صفر می‌شود.

[1] Network flow-based
[2] Hybrid genetic heuristic
[3] Iterated local search (ILS)
[4] Pruning technique

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]
[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]

x_k: اگر خوشه در نقطه k در نظر گرفته شود، مقدار یک به خود می‌گیرد، در غیر این صورت صفر می‌شود.

- **پارامتر**

d_{ik}: فاصله بین گره i و خوشه k،

c_k: هزینه ثابت در نظر گرفتن نقطه k به عنوان خوشه،

limitation:سایز هر گره که یک اسکالر است.

$$Min \sum_i \sum_k d_{ik} y_{ik} + \sum_{k \in K} c_k x_k \quad (۳۹)$$

$$s.t.$$

$$\sum_k y_{ik} = ۱ \ \forall k \quad (۴۰)$$

$$\sum_t y_{tk} \le limitation * x_k \qquad \forall k \quad (۴۱)$$

$$y_{ik}, x_k \in \{۰,۱\} \quad (۴۲)$$

تابع هدف (۳۹) به کمینه سازی هزینه تخصیص گره‌ها به یک خوشه و هزینه ایجاد خوشه می‌پردازد. محدودیت (۴۰) بیانگر آن است که هر گره مشتری باید به یک خوشه تخصیص داده شود. محدودیت (۴۱) نیز بیانگر آن است که تعداد مشتریان تخصیص داده شده به هر خوشه از حد تعیین‌شده (در اینجا (۳۷) در نظر گرفته شده است) بیشتر نشود. محدودیت (۴۲) نیز دامنه متغیرهای تصمیم‌گیری را مشخص می‌کند.

٤ نتایج و بحث

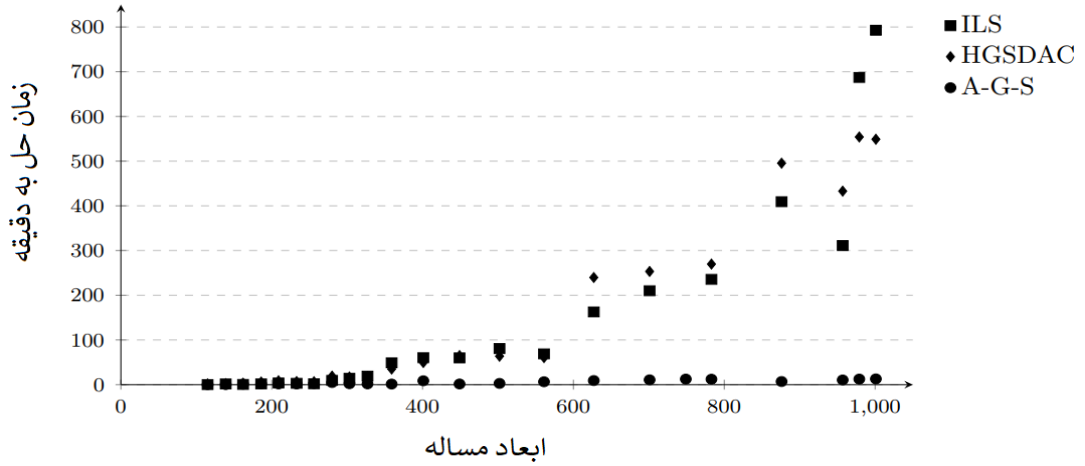
در این بخش ابتدا هزینه مسیریابی در یک روز خاص برای تحویل بسته‌های مشتریان مربوط به یک شرکت خرده فروشی آنلاین در تهران محاسبه می‌شود. با توجه به آنکه در داده‌های موجود فاصله زمانی بین هر دو نقطه موجود نیست و تنها مختصات جغرافیایی آن مشخص‌شده می‌باشد، به منظور تعیین فاصله زمانی بین هر دو جفت نقطه، از مختصات طول و عرض جغرافیایی داده شده، فاصله زمانی پیمایش برای ساعت آغازین روز بین دو نقطه خاص تعیین گردیده و بدین ترتیب برای سایر نقاط به تناسب، فاصله زمانی پیمایش بین هر دو نقطه محاسبه شده است. با توجه به حجم بالای داده های توزیع شرکت مورد بررسی (۲۲۶۰ داده برای یک روز)، نرم افزارهای بهینه‌سازی مانند CPLEX قادر به یافتن جواب برای این حجم از داده نمی‌باشند. از این رو یک الگوریتم ابتکاری مبتنی بر خوشه‌بندی برای ایجاد جواب های نزدیک به بهینه در زمان معقول توسعه داده شده است. انتظار می رود هزینه کل حاصل از این الگوریتم از هزینه ناشی از فعالیت فعلی مسیریابی شرکت در بخش توزیع کمتر باشد.

با توجه به درجه سختی حل مسایل VRP با تعداد حدود ۲۰۰ الی ۴۰۰ گره در رده مسایل با ابعاد بزرگ طبقه‌بندی می‌شوند و تلاش‌هایی برای حل آن ها صورت گرفته است. حال آن‌که در داده‌های توزیع شرکت مورد بررسی در این، تعداد نقاط مشتریان حدود ۲۰۰۰-۴۰۰۰ گره می‌باشد و به همین علت است که در رده مسایل مسیریابی با ابعاد بسیار بزرگ شناخته می‌شود. پر واضح است که ابزارهای حل بهینه‌سازی موجود نظیر CPLEX، BARON و... قادر به یافتن جواب بهینه برای این تعداد گره نبوده و بدین ترتیب روش‌های حل

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]

مختلفی برای این نوع مسایل مسیریابی ابعاد بزرگ مطرح شده است که در ادامه به نتایج حل مهم‌ترین الگوریتم‌های مورد استفاده می‌پردازیم. در شکل ۲ زمان حل لازم برای حل مساله VRP با ابعاد خیلی بزرگ توسط سه الگوریتم معروف در حوزه VRP را به‌صورت مقایسه‌ای نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود برای ابعاد حدود ۱۰۰۰ مساله دو الگوریتم جستجوی محلی تکراری[1] (ILS) و الگوریتم ترکیبی ژنتیک بیش از ۵۰۰ دقیقه (۸.۵ ساعت) زمان طول می‌کشد تا جوابی برای مساله تولید شود و چنانچه ابعاد مساله به حدود ۱۰۰۰۰ گره برسد، زمان مورد نیاز برای تولید جواب چند ماه خواهد بود. این در حالی است که الگوریتم AGS[2] از قابلیت بهتری نسبت به دو روش دیگر برخوردار است و در مدت زمان بسیار کمتری برای مساله جواب مشخص می‌کند.



شکل ۲. مدت زمان حل مدل براساس ابعاد مساله

جهت اجرای الگوریتم ابتکاری بر مبنای روش FedEx ، محدوده تهران را به ۱۶ ناحیه تقسیم‌بندی گردیده و هر مشتری بر حسب موقعیت جغرافیایی خود در تهران در یکی از این ۱۶ ناحیه قرار می‌گیرد. برای این منظور ابتدا مختصات طول و عرض جغرافیایی ۵ ناحیه مرکز، شمال، جنوب، شرق و غرب را از روی نقشه مشخص می‌شود. سپس مختصات نواحی شمال غربی، شمال شرقی، جنوب غربی و جنوب شرقی از راه متوسط جهت اصلی (شمال، جنوب، شرق و غرب) با مرکز تعیین می‌گردد. هر گره مشتری نیز برحسب طول و عرض جغرافیایی خود در یکی از این ۱۶ ناحیه قرار می‌گیرد. جهت درک بهتر چنانچه مختصات طول و عرض یک مشتری خاص مانند a را به ترتیب x_a و y_a فرض کنیم، و مختصات طول و عرض مرکز، شمال، شرق ، جنوب و غرب را به ترتیب x_m و y_m، x_n و y_n ، x_e و y_e و x_w و y_w بنامیم؛ چنانچه $x_m \le x_a \le x_n$ و به طور هم‌زمان $y_m \le y_a \le y_n$ قرار بگیرد، آنگاه مشتری aدر یکی از نواحی ۵،۶،۷، و یا ۸ قرار می‌گیرد. به طور جزیی‌تر اگر $X_۷ \le X_a \le X_۸$ و $Y_۷ \le Y_a \le Y_۸$ باشد، آنگاه aدر منطقه ۷ جای می‌گیرد و با این رویکرد مشابه موقعیت هر گره مشتری تعیین می‌گردد. با توجه به آنکه تعداد مشتریان موجود در روز آغاز فرآیند ۵۲۲۶۰

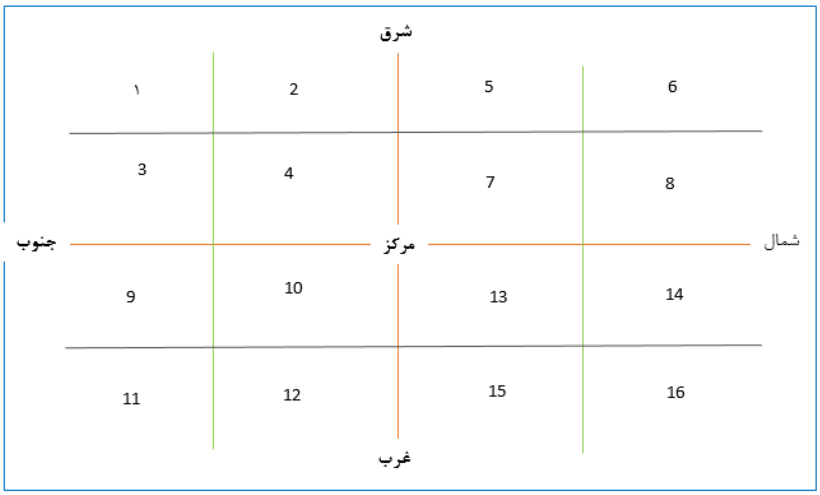
[1] Iterated local search (ILS)
[2] Auto moving grid search (AGS)

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]
[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]

مورد بوده است، تعداد مشتریان قرار گرفته در هر ناحیه به صورت جدول ۲ است. این تقسیم‌بندی ۱۶ گانه در شکل ۳ نشان داده شده است.

جدول ۲. تعداد مشتریان در روز آغاز فرآیند در هر ناحیه

شماره ناحیه	تعداد مشتری	شماره ناحیه	تعداد مشتری	شماره ناحیه	تعداد مشتری	شماره ناحیه	تعداد مشتری
۱	۱	۵	۱	۹	۱	۱۳	۳۹
۲	۰	۶	۴۹	۱۰	۰	۱۴	۹۰۹
۳	۲	۷	۲۶۹	۱۱	۲۲۲	۱۵	۲
۴	۲	۸	۷۴۲	۱۲	۱۹	۱۶	۱



شکل ۳. تقسیم‌بندی نواحی تهران

همان‌طور که مشاهده می‌شود، بیشترین میزان پخش سفارشات شرکت مورد بررسی در شمال شرق و شمال غرب تهرن است. با توجه به NP-hard بودن مساله، ابزار CPLEX قادر به تولید جواب بهینه برای حدود ۳۷ گره است که زمان رسیدن به جواب بهینه برای ۳۷ گره حدود ۳ ثانیه است. بنابراین با طراحی یک الگوریتم ابتکاری دیگر، تعداد مشتریان موجود در هر ناحیه را به دسته های با حداکثر ۳۷ تعداد گره تقسیم می‌نماییم به طوری‌که مشتریان قرار گرفته در یک دسته خاص در مجاورت یکدیگر بوده و فاصله کمی نسبت به همدیگر داشته باشند. نخستین رویکردی که برای این تقسیم‌بندی به ذهن می‌رسد استفاده از الگوریتم‌های خوشه‌بندی نظیر k-means است که نقاط نزدیک به هم را در یک خوشه قرار می‌دهد. مشکلی که در ارتباط با این الگوریتم‌های خوشه‌بندی وجود دارد آن است که محدودیتی در تعداد نقاط قرار داده شده در یک خوشه وجود ندارد. به بیان بهتر ممکن است در یک خوشه بیش از ۳۷ گره مشتری قرار بگیرد که با توجه به محدودیت CPLEX امکان حل آن وجود ندارد. بنابراین، برای مقابله با مشکلات دسته‌بندی ۳۷ تایی مشتریان با استفاده از مجموعه معادلات ۳۷-۴۰ با هزینه ثابت می‌پردازیم که با در نظر گرفتن ماتریس فاصله بین هر زوج نقاط، مشتریان نزدیک به یکدیگر را در یک گروه قرار می‌دهد و نمی‌گذارد تعداد مشتریان بیشتر از ۳۷ در نظر گرفته شود.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]

به منظور اجرای این مدل در CPLEX تعداد ۲۲۶۰ گره توزیع در شرکت مورد مطالعه به بازه‌های زمانی ۹-۱۲، ۱۲-۱۵، ۱۵-۱۸، ۱۸-۲۱ تقسیم گردیده و داده‌های هر بخش در CPLEX به طور جداگانه اجرا شده است. مشکل اصلی که در این فرایند وجود دارد محدویت حافظه ابزار CPLEX است. بدین منظور در این تحقیق رویکرد ابتکاری دیگری توسعه داده شده است. ابتدا در هر ناحیه فاصله اقلیدسی هر گره مشتری با یک گره خاص به عنوان گره مرجع تعیین می‌شود به‌طوری‌که گره هاب به عنوان گره مرجع در نظر گرفته شده است. سپس فواصل به‌دست آمده به صورت صعودی مرتب‌شده و از ابتدا ۳۷ گره اول، ۳۷ گره دوم و الی آخر جدا گردیده است. لازم به ذکر است ۳۷ گره تعدادی است که ابزار CPLEX می‌تواند به صورت بهینه در زمان کوتاه حل کند. هریک از این دسته های ۳۷ گره در نرم افزار CPLEX حل‌شده و جواب حاصل ذخیره‌شده است. برای ناحیه هایی که تعداد گره های آن ها کمتر از ۳۷ مشتری است، در صورت امکان با گره های نواحی همسایه تجمیع کرده و برای آنها مساله مسیریابی را توسط CPLEX حل می‌نماییم. در جدول ۳، نتایج حل الگوریتم نشان داده شده است. مطابق با این جدول، هزینه سفر هر یک از نواحی ۱۶ گانه در نظر گرفته شده نشان داده شده است.

جدول ۳. هزینه سفر به هر یک از نواحی

شماره ناحیه	هزینه سفر	شماره ناحیه	هزینه سفر	شماره ناحیه	هزینه سفر	شماره ناحیه	هزینه سفر
۱	۰/۹۹۵	۵	۰/۵۰۷	۹	۰	۱۳	۰/۹۱۹
۲	۰	۶	۰	۱۰	۰	۱۴	۷/۳۴۴
۳	۰/۷۴۳	۷	۱/۹۲۵	۱۱	۲/۳۷۱	۱۵	۰
۴	۱/۲۵۷	۸	۷/۵۱۲	۱۲	۰	۱۶	۰
جمع هزینه سفر	۲/۹۹۵	جمع هزینه سفر	۹/۹۴۴	جمع هزینه سفر	۲/۳۷۱	جمع هزینه سفر	۸/۲۶۳

جمع هزینه کل سفر با احتساب هزینه سفر در هر خوشه برابر با ۲۳/۵۷۳ می‌باشد. با در نظر گرفتن تعداد کل وسایل نقلیه، ضریب هزینه برای مسافت طی‌شده و هزینه ثابت وسایل نقلیه هزینه کل برابر با ۳۰۲۷۳۰ واحد پولی محاسبه می‌شود. پس از حل تعداد مشتریان باقی‌مانده که هنوز بازدید نشده‌اند، در هر ناحیه در شکل ۴ نشان داده شده است.

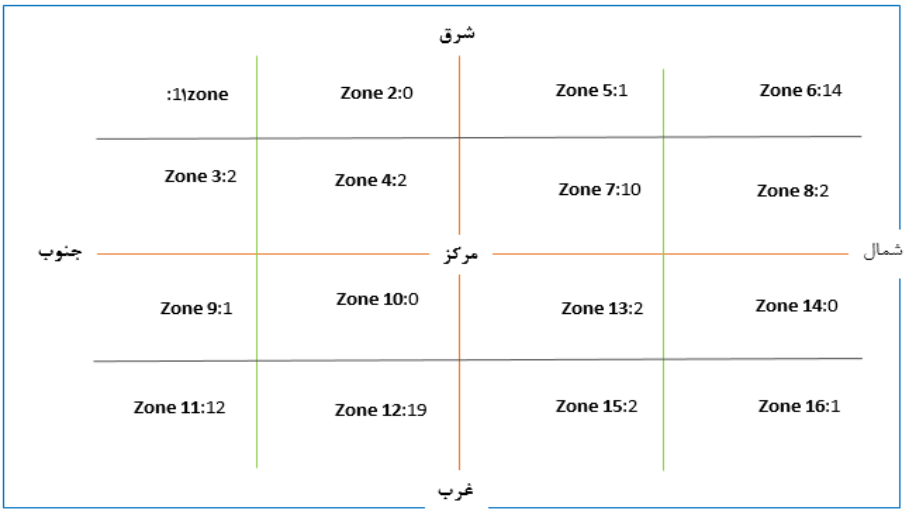
به منظور جلوگیری از ارسال خودروی اضافی، در هر ناحیه چهار بخش را مطابق جدول ۴ تجمیع می کنیم.

جدول ٤. تجمیع تقاضا در نواحی

شماره نواحی	تقاضا
ناحیه ۱، ۲، ۳ و ۴	۵ واحد
ناحیه ۵، ۶، ۷ و ۸	۲۷ واحد
ناحیه ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲	۳۲ واحد
ناحیه ۱۳، ۱۴، ۱۵ و ۱۶	۵ واحد

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]



شکل ٤. تعداد مشتریان باقی مانده در هر ناحیه

با توجه به این‌که بعد از تجمیع تقاضا برخی از نواحی ۵ واحد تقاضا تجمیع‌شده برآورد نشده دارند، می‌توان برای این نوع از تقاضاها که تعداد کمتری دارند از یک نوع وسیله نقلیه دیگر که ظرفیت کمتر دارند مانند موتورسیکلت استفاده شود تا ظرفیت وسایل نقلیه دیگر مانند خودروهای حمل‌کننده بار برای تقاضاهای ۲۷ و ۳۲ واحدی در نظر گرفته شوند. در این صورت با تخصیص هر یک از وسایل نقلیه مناسب به نواحی برای بازدید تقاضاهای باقیمانده هزینه هر یک از نواحی مطابق با جدول ۵ محاسبه می‌شود.

جدول ۵. هزینه سفر پس از تخصیص وسایل نقلیه مناسب به تقاضاهای برآورده‌نشده

شماره ناحیه	هزینه سفر	شماره ناحیه	هزینه سفر	شماره ناحیه	هزینه سفر	شماره ناحیه	هزینه سفر
ناحیه ۱، ۲، ۳ و ۴	۱/۵۹۶۴	ناحیه ۵، ۶، ۷ و ۸	۱/۶۹۸۰۵	ناحیه ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲	۰/۲۹۲۷	ناحیه ۱۳، ۱۴، ۱۵ و ۱۶	۰/۱۳۳۰

٤-۱ بحث و تصمیم گیری

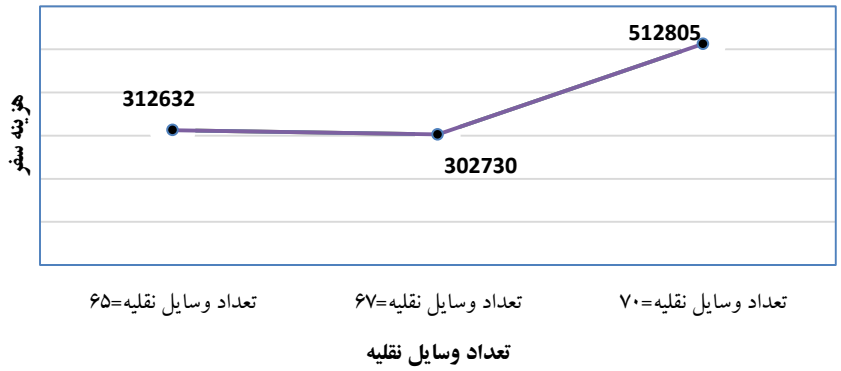
با توجه به این‌که در صورت به‌کارگیری چارچوب پیشنهادی در شرکت مورد مطالعه جمع کل هزینه‌ها برابر با ۲۳/۵۷۳ واحد پولی برآورد شده است با در نظر گرفتن ضریب هزینه به مقدار ۱۰۰۰۰ برای مسافت، هزینه کل پیمایش‌شده برای بازدید از مشتریان برابر با ۲۳۵۷۳۰ واحد پولی برآورد می‌شود. همچنین، اگر هزینه ثابت ۶۷ وسیله نقلیه را نیز ۱۰۰۰ واحد پولی به ازای هر وسیله نقلیه اعزام‌شده در نظر بگیریم، هزینه کل آن برابر است با ۳۰۲۷۳۰ واحد پولی. بنابراین، میزان صرفه‌جویی به‌دست آمده از استقرار هزینه بهینه نسبت به هزینه موجود در شرکت مورد بررسی معادل با ۲۵۷۱۷۵ واحد پولی خواهد بود که معادل ۳۸/۵۸ درصد بهبود در میزان هزینه‌ها است که این میزان بهبود از کاهش هزینه از ۴۹۲۹۰۵ به ۳۰۲۷۳۰ حاصل شده است.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]

٤-۲ تحلیل حساسیت

در این بخش از تحقیق با تغییر در مقدار پارامترهای مساله به تغییرات ناشی از هر یک از این تغییرات بر روی هزینه کل مسیر بررسی می‌شود. برای این منظور، در شکل ۵، تغییرات وسایل نقلیه در صورت تغییر آن به ۷۰ و ۶۵ نشان داده شده است.



شکل ۵. تغییرات هزینه در صورت کاهش و افزایش وسایل نقلیه

با توجه به تغییرات بررسی‌شده در تعداد وسایل نقلیه مشخص شده است که در صورت کاهش وسایل نقلیه علی رغم این‌که تعداد وسایل کمتر است و انتظار می‌رود هزینه کل کاهش یابد، اما به‌دلیل این‌که تقاضاهای باقیمانده می‌بایست پوشش داده شوند؛ لذا ممکن است وسایل مناسبی ارسال نشود که این عامل سبب می‌شود هزینه کل سفر افزایش یابد. همچنین، نتایج نشان می‌دهد که افزایش تعداد وسایل نقلیه باعث رشد قابل ملاحظه در هزینه‌ها خواهد شد. بنابراین، در صورتی که ۶۷ وسیله نقلیه در نظر بگیریم حالت بهینه برای هزینه‌ها محاسبه می‌شود.

۵ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی برای مسیریابی بهینه وسایل نقلیه ناهمگن با پنجره زمانی با قابلیت برداشت و تحویل هم‌زمان محصولات به مشتریان ارایه گردید. به صورت کلی مدل پیشنهادی تفاوت‌های اصلی با تحقیقات پیشین دارد؛ در نظر گرفتن ضریب عملکرد رانندگان از منظر آشنایی با مسیرها، ارایه سه نوع مدل مسیریابی (برداشت و تحویل هم‌زمان، مدل مسیریابی باز و مدل مسیریابی تلفیقی باز و بسته) و پیاده‌سازی در یکی از شرکت‌های لجستیکی با تعداد مشتریان زیاد، از نوآوری‌های اصلی مدل مقاله حاضر در مقایسه با سایر تحقیق پیشین به شمار می‌رود.

برای حل مدل، الگوریتمی با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی مبتنی بر فاصله و ظرفیت وسایل نقلیه توسعه داده شد. نتایج حاصل از اجرای مدل‌ها نشان می‌دهد که روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های موجود، بهتر عمل می‌کند. علاوه بر این، با بهینه‌سازی مسیریابی وسایل نقلیه، زمان و هزینه‌های حمل و نقل کاهش‌یافته و احتمال تاخیر در تحویل محصولات به مشتریان کاهش می‌یابد. بر طبق نتایج به‌دست آمده مدل بهینه‌سازی، با اعزام ۶۷ وسیله نقلیه مختلف جهت برداشت و تحویل چندگانه محصول به مشتری از طریق تقسیم نواحی شهر تهران به ۱۶ ناحیه قادر به کمینه‌سازی هزینه‌های سیستم لجستیک هستیم و در این حالت مقدار هزینه‌ها نسبت به وضعیت

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]

موجود ۳۸/۵۸ درصد کاهش پیدا کرده است. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از الگوریتم پیشنهادی در مسیریابی وسایل نقلیه ناهمگن با پنجره زمانی با قابلیت برداشت و تحویل همزمان محصولات، می‌تواند راهکار مناسبی برای کمینه‌سازی هزینه‌های حمل و افزایش رضایت مشتریان باشد. برای تحقیقات آتی پیشنهاد می‌شود که یک مدل مسیریابی برای وسایل نقلیه با چندپایانه برای استقرار و اعزام وسایل نقلیه در نظر گرفته شود. علاوه بر این، یک مقدار احتمالی برای تقاضای مشتریان و تشکیل یک مساله مسیریابی تخمینی وسایل نقلیه ایجاد شود.

منابع

[1] Darehmiraki, M. (2012). A new innovative algorithm to solve the vehicle routing problem. Journal of Operational Research in its Applications, 9(4), 1-7 (In Persian).

[2] Dolatnezhad samarin, A., Mir Hoseini, S.A., Yousefi khoshbakht, M., (2012). A mixed integer programming model and an efficient method for the fuel supply problem of oil product supply points with a time-dependent time window. Journal of Operational Research in its Applications, 14(1), 15-37 (In Persian).

[3] Rezaei Kallaj, M., Abolghasemian, M., Moradi Pirbalouti, S., Sabk Ara, M., & Pourghader Chobar, A. (2021). Vehicle routing problem in relief supply under a crisis condition considering blood types. Mathematical Problems in Engineering, 2021, 1-10.

[4] Nedjati, A., Izbirak, G., & Arkat, J. (2017). Bi-objective covering tour location routing problem with replenishment at intermediate depots: Formulation and meta-heuristics. Computers & Industrial Engineering, 110, 191-206.

[5] Bertsimas, D., Delarue, A., Eger, W., Hanlon, J., & Martin, S. (2020). Bus routing optimization helps Boston public schools design better policies. INFORMS Journal on Applied Analytics, 50(1), 37-49.

[6] Babaei, M., & Rajabi-Bahaabadi, M. (2019). School bus routing and scheduling with stochastic time-dependent travel times considering on-time arrival reliability. Computers & Industrial Engineering, 138, 106125.

[7] Koch, H., Bortfeldt, A., and Wäscher, G., (2018). A hybrid algorithm for the vehicle routing problem with backhauls, time windows and three-dimensional loading constraints. OR Spectr, 1–47.

[8] Tirkolaee, E. B., Goli, A., Bakhsi, M. and Mahdavi, I. (2022). A robust multi-trip vehicle routing problem of perishable products with intermediate depots and time windows, Numerical Algebra, Control and Optimization,7(4), 417-433.

[9] Lenstra JK, Kan AR. Complexity of vehicle routing and scheduling problems. Networks. 1981 Jun;11(2):221-7.

[10] Laporte G, Nobert Y. Exact algorithms for the vehicle routing problem. InNorth-Holland mathematics studies 1987 Jan 1 (Vol. 132, pp. 147-184). North-Holland.

[11] Kumari, M., De, P. K., Narang, P., & Shah, N. H. (2023). Integrated optimization of inventory, replenishment, and vehicle routing for a sustainable supply chain utilizing a novel hybrid algorithm with carbon emission regulation. Expert Systems with Applications, 220, 119667.

[12] Neira, D. A., Aguayo, M. M., De la Fuente, R., & Klapp, M. A. (2020). New compact integer programming formulations for the multi-trip vehicle routing problem with time windows. Computers & Industrial Engineering, 144, 106399.

[13] Huang, N., Li, J., Zhu, W., & Qin, H. (2021). The multi-trip vehicle routing problem with time windows and unloading queue at depot. Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 152, 102370.

[14] Wang, Y., Sun, Y., Guan, X., Fan, J., Xu, M., & Wang, H. (2022). Two-echelon multi-period location routing problem with shared transportation resource. Knowledge-Based Systems, 226, 107168.

[15] Hasanpour Jesri, Z. S., Eshghi, K., Rafiee, M., & Van Woensel, T. (2022). The Multi-Depot Traveling Purchaser Problem with Shared Resources. Sustainability, 14(16), 10190.

[16] Nozari, H., Tavakkoli-Moghaddam, R., & Gharemani-Nahr, J. (2022). A neutrosophic fuzzy programming method to solve a multi-depot vehicle routing model under uncertainty during the covid-19 pandemic. International Journal of Engineering, 35(2), 360-371.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]

[17] Jiao, L., Peng, Z., Xi, L., Guo, M., Ding, S., & Wei, Y. (2022). A multi-stage heuristic algorithm based on task grouping for vehicle routing problem with energy constraint in disasters. Expert Systems with Applications, 118740.
[18] Karimi, L., & Nawrin Ferdous, C. (2022). Branch and Price Algorithm for Multi-Trip Vehicle Routing with a Variable Number of Wagons and Time Windows. Algorithms, 15(11), 412.
[19] Mardaneh, E., Heydar, M., & Loxton, R. (2022). Branch-and-price for clash-free periodic supply vessel planning problem with split delivery and variable service time. Available at SSRN 4213089.
[20] He, D., Ceder, A. A., Zhang, W., Guan, W., & Qi, G. (2023). Optimization of a rural bus service integrated with e-commerce deliveries guided by a new sustainable policy in China. Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 172, 103069.
[21] Hu, H., Qin, H., Xu, G., Huang, N., & He, P. An Enhanced Branch-and-Price-and-Cut Algorithm for the Multi-Trip Vehicle Routing Problem with Time Windows. Available at SSRN 4395200.
[22] Liu R, Jiang Z. The close–open mixed vehicle routing problem. European Journal of Operational Research. 2012 Jul 16, 220(2), 349-60.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.71773/jamlu-2024-1-2220]