مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال بیستم، شماره سوم (پیاپی ۷۸)،پاییز ۰۲، ص ص ۳۲-۱۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

بازیابی سیگنال‌های تُنک با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی

محمدسعید علمداری[1*]، مسعود فاطمی[2]، ابوذر غفاری[3]

۱- دانشجوی دکتری، دانشکده ریاضی کاربردی، دانشگاه خواجه نصیر الدین طوسی، تهران، ایران
۲- دانشیار، دانشکده ریاضی کاربردی، دانشگاه خواجه نصیر الدین طوسی، تهران، ایران
۳- استادیار، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

رسید مقاله: ۱۵ بهمن ۱۴۰۱
پذیرش مقاله: ۱۶ خرداد ۱۴۰۲

چکیده

در این مقاله با ایده از روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی و به‌کارگیری نرم صفر هموارشده در تابع هدف، روش پیشنهادی برای حل مساله یافتن جواب‌های تنک دستگاه معادلات خطی فرومعین ارایه می‌شود. این روش رویکرد جدیدی برای حل زیرمسایل درجه دوم به‌صورت دقیق فراهم می‌آورد که منجر به پیچیدگی کمتر و سادگی حل زیرمسایل درجه دوم می‌گردد. چارچوب روش پیشنهادی با حدس اولیه برای سیگنال تُنک ناشناخته شروع و در هر تکرار برای محاسبه جهت جستجو یک مساله بهینه‌سازی درجه دوم مشخص حل می‌شود. سپس تحلیل نظری روش ارایه و همگرایی فرو معین آن ثابت می‌شود. نتایج به‌دست‌آمده از اجرای روش پیشنهادی بر روی ماتریس‌ها در ابعاد مختلف نشان می‌دهد که کارایی روش به ابعاد ماتریس ورودی وابسته نیست. در نهایت نتایج عددی مبتنی بر مقایسه شاخص SNR روش پیشنهادی با جدیدترین الگوریتم‌های بازیابی سیگنال‌های تُنک گزارش می‌شود که کارایی و عملکرد بالای روش را تاکید می‌کند.

کلمات کلیدی: بازیابی سیگنال تُنک، برنامه‌ریزی غیرخطی، نرم صفر هموارشده، برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی.

۱ مقدمه

ایده تجزیه تُنک یا یافتن جواب‌های تُنک دستگاه معادلات خطی فرومعین یکی از مسایل اساسی در پردازش سیگنال و تصویر بوده و روش‌های متنوعی برای آن معرفی شده است. ازجمله روش‌های مورد توجه در این حوزه می‌توان به الگوریتم‌های مبتنی بر نرم صفر هموارشده اشاره کرد که در مقایسه با روش‌های مبتنی بر حداقل‌کردن مستقیم نرم صفریا نرم یک، دارای سرعت و صحت بیشتری بوده و ویژگی‌های مطلوب پیوستگی، مشتق‌پذیری، سادگی در پیاده‌سازی و رفتار عددی مناسب را داراست، لذا در سال‌های اخیر مورد توجه محققان قرارگرفته است. مساله یافتن جواب های تُنک دستگاه معادلات خطی فرومعین کاربردهای بسیار زیاد و متنوعی دارد.

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: m.s.alamdari69@gmail.com

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.22034/20.3.19]

درخصوص برخی کاربردهای آن می‌توان به بازسازی تصاویر پزشکی، تقویت و فشرده‌سازی تصاویر، جداسازی سیگنال، سنجش فشرده، تشخیص الگو، تصویربرداری رزونانس مغناطیسی، نمونه‌برداری از سیگنال‌های آنالوگ، پردازش سیگنال آرایه و رادار اشاره کرد.

تعداد جواب‌های دستگاه‌های معادلات خطی فرومعین، در صورت وجود نامتناهی است ولی شرط تُنک‌بودن پاسخ، منجر به یافتن پاسخ یکتای مساله می‌شود. تُنک‌بودن یک بردار بدین معناست که تعداد عناصر غیرصفر بردار نسبت به تعداد کل درایه ها به اندازه کافی کمتر باشد، یعنی نرم صفر آن کوچک باشد. سیستم معادله خطی (۱) را در نظر بگیرید:

$$y = Ax \qquad (۱)$$

که در آن $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ماتریس حسگر با $n > m$ و $y \in \mathbb{R}^m$ بردار سیگنال است. هدف اصلی در مساله بازیابی سیگنال، یافتن تُنک‌ترین بردار ممکن x است که در (۱) صدق کند. برای حل مساله باید معیاری برای سنجش تُنک‌بودن بردار در نظرگرفته شود تا با استفاده از آن، مساله بهینه‌سازی حل و پاسخ یکتای مساله مشخص شود. یک مدل ریاضی رایج، مساله حداقل‌سازی نرم صفر به فرم (۲) می‌باشد، یعنی

$$\min_x \|x\|_0 \qquad s.t. \qquad y = Ax \qquad (۲)$$

که در آن $\|x\|_0$ معرف تعداد درایه‌های غیرصفر بردار x است. استفاده از این نرم به‌دلیل ناپیوستگی، مشتق ناپذیری و حساسیت زیاد به نویز برای حل مسایل بهینه‌سازی مناسب نیست و به همین دلیل محققان در سال‌های اخیر به‌صورت تجربی [۱] و نظری [۵-۲] نشان داده‌اندکه می‌توان نرم یک را جایگزین نرم صفرکرد و مساله بهینه‌سازی حداقل‌سازی نرم یک را حل کرد. معیار دیگری که جایگزین نرم صفر بوده و به عنوان تخمینی از آن معرفی می‌شود، نرم صفر هموارشده می‌باشد، یعنی

$$\|x\|_\sigma := n - \sum_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right) \qquad (۳)$$

الگوریتم‌های مبتنی بر نرم صفر هموارشده (۳) در مقایسه با روش‌های مبتنی بر حداقل‌کردن نرم صفر و یک، علاوه بر سرعت بیشتر دارای ویژگی‌های مطلوبی از قبیل پیوستگی، مشتق پذیری، سادگی و رفتار عددی مناسب می‌باشندکه در [۶] گزارش شده است. در این مقاله بر اساس نرم صفر هموارشده روش کارآمدی برای حل (۲) پیشنهاد می‌شودکه اصلاحی از روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی [۷] می‌باشد و ویژگی‌های آن به شرح زیر است:

۱) خواص همگرایی سراسری مطلوبی دارد.
۲) از رویکرد جدیدی برای حل زیرمسایل درجه دوم بهره می برد.
۳) کاهش پیچیدگی محاسباتی مساله را در پی دارد.

ساختار کلی مقاله بدین شرح است: بخش ۲ به مرور روش نرم صفر هموارشده می‌پردازد. روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی در بخش ۳ یادآوری می‌گردد. روش پیشنهادی و تحلیل نظری آن در بخش ۴ آورده شده

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.22034/20.3.19]

است. بخش ۵ ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی در مقایسه با سایر الگوریتم‌های شناخته‌شده در زمینه بازیابی سیگنال‌های تُنک را نشان می‌دهد و در نهایت نتیجه‌گیری و پیشنهادها در بخش ۶ آورده شده است.

۲ مروری بر روش نرم صفر هموارشده

روش‌های متنوعی برای یافتن تُنک‌ترین پاسخ به‌کار برده می‌شوند و در مورد برخی از آنها می‌توان به روش‌های جستجوی تطابق [۸]، جستجوی پایه [۹]، برنامه‌ریزی خطی [۱۰] و روش فریم‌ها [۱۱] اشاره کرد.

روش دیگری که در این زمینه مطرح‌شده، نرم صفر هموارشده (SL0) نام دارد. این روش در سال ۲۰۰۹ توسط مهیمنی و همکارانش [۶] معرفی شد و بر اساس قابلیت روش معرفی شده تابع ناپیوسته نرم صفر توسط تابع پیوسته تخمین زده می‌شود. بدین منظور ابتدا تابع گوسی $f_\sigma(x_i)$ با میانگین صفر به فرم (۴) در نظرگرفته می‌شود:

$$f_\sigma(x_i)=\exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right) \qquad (۴)$$

به وضوح مشخص است که اگر σ خیلی کوچک باشد بر اساس رابطه (۵) داریم:

$$\lim_{\sigma\to 0} f_\sigma(x_i)=\begin{cases}1 & x_i=0\\ 0 & x_i\neq 0\end{cases} \qquad (۵)$$

و در نتیجه نرم صفر هموارشده بردار x به‌صورت رابطه (۶) تعریف می‌گردد:

$$F_\sigma(x):=\sum_{i=1}^{n} f_\sigma(x_i) \qquad (۶)$$

از رابطه (۶) برای مقادیر کوچک σ داریم:

$$\|x\|_0 \approx n-F_\sigma(x) \qquad (۷)$$

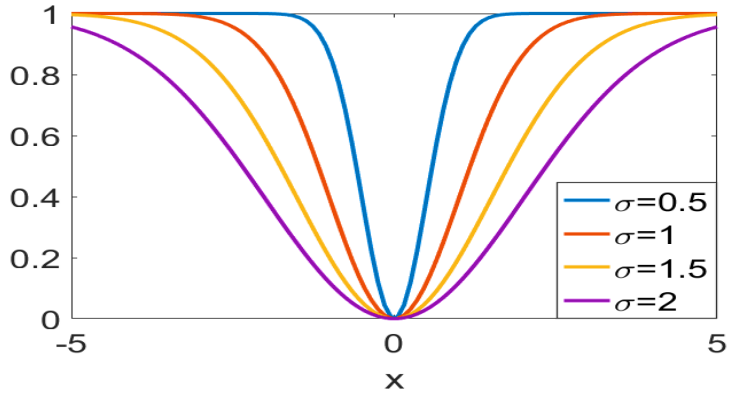
حال اگر σ در رابطه (۷) به سمت صفر میل دهیم، تقریب به تساوی تبدیل می‌گردد،

$$\|x\|_0 = n-\lim_{\sigma\to 0} F_\sigma(x) \qquad (۸)$$

لذا براساس (۸) حداکثرکردن تابع $F_\sigma(x)$ برای σ کوچک معادل با حداقل‌کردن نرم صفرخواهد بود. شکل۱ نمودار تابع $1-f_\sigma(x)$ را برای مقادیر مختلف x متعلق به $\mathbb{R}$ نشان می‌دهد. می‌توان مشاهده کرد که برای σ کوچک تخمین‌ها به نرم صفر، واقعی‌تر می‌شوند در حالی‌که هزینه آن ناهموارشدن هر چه بیشتر تابع تقریب بوده که می‌تواند مشکلاتی را در فرایند بهینه‌سازی ایجاد کند از این رو برای جلوگیری از به دام افتادن الگوریتم در بیشینه‌های محلی و کاهش پیچیدگی محاسباتی، مقدار اولیه بزرگی برای این پارامتر در نظرگرفته می‌شودکه بتدریج در فرایند تکرارها کاهش می‌یابد.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.22034/20.3.19]



شکل ۱. نمودارتابع هموار $f_\sigma(x)$ −۱ برای مقادیر مختلف σ

۳ مروری بر روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی

روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی[1] (SQP) یک روش شناخته‌شده و کارا برای حل مسایل بهینه‌سازی غیرخطی، غیرمحدب و هموار است. این روش اولین بار توسط ویلسون در سال ۱۹۶۳ پیشنهاد و در ادامه توسط هان و پاول رایج شد. رویکرد این روش بدین صورت است که در هر تکرار، برای محاسبه جهت جدید d مساله بهینه‌سازی درجه دوم حل می‌گردد و در آن از تقریب درجه دوم تابع هدف و تقریب خطی درجه اول قیود مساله اصلی استفاده می‌شود. سرعت همگرایی فرو معین و نتایج همگرایی قوی آن، محققان زیادی را به تحقیقات گسترده در این زمینه سوق داده است [۱۲-۱۴]. مساله بهینه‌سازی مقید (۹) را در نظر بگیرید:

$$P\begin{cases}\min\limits_{x} & f_\sigma(x)=-\sum\limits_{i=1}^{n}\exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right)\\ s.t. & c(x)=y-Ax\end{cases} \qquad (۹)$$

برای محاسبه جهت جدید d زیر مساله ناحیه اعتماد درجه دوم (۱۰) در نظرگرفته می‌شود:

$$QP(x,\rho)\begin{cases}\min\limits_{d} & q(d):=g^t d+\frac{1}{2}d^t H d\\ & s.t. \quad c+\nabla c^t d=0\\ & \|d\|_2\le\rho\end{cases} \qquad (۱۰)$$

که در آن ρ شعاع ناحیه اعتماد، g گرادیان تابع هدف و H هسین تابع می‌باشد. به‌صورت دقیق‌تر داریم:

$$g_i=\frac{2x_i}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right) \qquad (۱۱)$$

$$H=Diag\left(\left(\frac{2}{\sigma^2}-\frac{4x_i^2}{\sigma^4}\right)exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right)\right) \qquad (۱۲)$$

که در آن $Diag(\omega_i)$ ماتریس قطری با عناصر ω_i می‌باشد. نمادهای Δq به عنوان کاهش پیش‌بینی‌شده و Δf به عنوان کاهش واقعی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

[1] Sequential Quadratic Programming

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.22034/20.3.19]

$$\Delta q := q(0) - q(d) = -g^t d - \frac{1}{2} d^t H d \quad (13)$$

$$\Delta f := f(x) - f(x+d) \quad (14)$$

شرط زیر کاهش کافی در تابع هدف نامیده می‌شود که در آن $\alpha \in (0,1)$ است.

$$\Delta f \geq \alpha \Delta q \quad (15)$$

٤ روش پیشنهادی و تحلیل نظری آن

در این مقاله روش پیشنهادی، روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی اصلاح‌شده نامیده می‌شود. بدین منظور در ابتدا مساله ناهموار (۲) مدنظر می‌باشد و سپس تقریب همواری از آن به فرم مساله (۹) در نظر گرفته می‌شود. نقطه شروع الگوریتم نقطه شدنی x_0 صادق در معادله $Ax_0 = y$ است و جستجو در فضای پوچ A صورت می‌پذیرد و لذا تمامی تکرارها، شدنی باقی می‌مانند. زیر مساله (۱۰) به فرم (۱۶) تبدیل می‌شود:

$$QP(x,\rho)\begin{cases} \min\limits_{d} & g^t d + \frac{1}{2} d^t H d \\ s.t. & Ad = 0, \\ & \|d\|_2 \leq \rho, \end{cases} \quad (16)$$

که در آن g و H در (۱۱) و (۱۲) تعریف شده‌اند. **لم۱** درخصوص جواب مساله (۱۶) ارایه شده است که رویکرد جدیدی برای حل زیرمسایل درجه دوم براساس تخمین جواب دقیق در زمان کمتری فراهم می‌کند. به عبارتی در مساله (۱۶) محدودیت نابرابری $\|d\|_2 \leq \rho$، با در نظر گرفتن پارامتر جریمه $\frac{\gamma}{2}$ به تابع هدف منتقل می‌شود.

لم۱: مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\min_{d} \quad g^t d + \frac{1}{2} d^t H d + \frac{\gamma}{2} d^t d \qquad s.t. \qquad Ad = 0 \quad (17)$$

که در آن g و H طبق روابط (۱۱) و (۱۲) تعریف شده‌اند و γ اسکالر مثبت دلخواه می‌باشد، آنگاه جواب مساله (۱۷) برابر $d^* = -\mathcal{H}^{-1}\left(A^t \Lambda^* + g\right)$ است که در آن $\Lambda^* = \left(-A\mathcal{H}^{-1}A^t\right)^{-1}\left(A\mathcal{H}^{-1}g\right)$ می‌باشد. علاوه بر آن $\mathcal{H} = H + \gamma I$ است و $0 < \rho_1 \leq \rho$ وجود دارد به‌طوری که d^* جواب بهینه مساله (۱۶) است اگر رابطه زیر برقرار باشد که در آن M کران بالایی برای Λ^* می‌باشد.

$$\gamma \geq \frac{\|A\|M + \|g\|}{\rho_1} - \max_{i=1,\ldots,n}\left|\left(\frac{2}{\sigma^2} - \frac{4x_i^2}{\sigma^4}\right) exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right)\right|$$

اثبات: ابتدا تابع لاگرانژین مساله (۱۷) را به‌صورت $\mathcal{L} = \frac{1}{2} d^t \mathcal{H} d + g^t d + \Lambda^t A d$ در نظر می‌گیریم، حال بر اساس شرایط KKT داریم:

$$\mathcal{H}d + g + A^t \Lambda = 0 \quad (18)$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.22034/20.3.19]

$$Ad = 0 \qquad (19)$$

با استفاده از (۱۸) داریم:

$$d^* = -\mathcal{H}^{-1}\left(A^t\Lambda^* + g\right) \qquad (20)$$

حال با استفاده از (۱۹) و (۲۰) داریم:

$$0 = Ad = -A\mathcal{H}^{-1}\left(A^t\Lambda^* + g\right) \qquad (21)$$

با به‌کارگیری (۲۱) مقدار Λ^* محاسبه می‌گردد و در نتیجه:

$$\Lambda^* = \left(-A\mathcal{H}^{-1}A^t\right)^{-1} A\mathcal{H}^{-1}g \qquad (22)$$

در ادامه نشان می‌دهیم که برای هر $\gamma \geq 0$، Λ^* کراندار است. در ابتدا از رابطه (۲۲) داریم:

$$\left(-A\mathcal{H}^{-1}A^t\right)\Lambda^* = A\mathcal{H}^{-1}g \qquad (23)$$

با تقسیم رابطه (۲۳) بر $\mathcal{H}^{-1}$ داریم:

$$\frac{-A\mathcal{H}^{-1}A^t\Lambda^*}{\|\mathcal{H}\|^{-1}} = A\frac{\mathcal{H}^{-1}}{\|\mathcal{H}\|^{-1}}g \qquad (24)$$

از طرفی می دانیم:

$$\lim_{\gamma\to\infty}\frac{\mathcal{H}^{-1}}{\|\mathcal{H}\|^{-1}} = I \qquad (25)$$

با حد گرفتن از دو طرف رابطه (۲۴) و به‌کارگیری (۲۵) داریم:

$$-AA^t\Lambda^* = Ag \qquad (26)$$

و از (۲۶) نتیجه می‌گیریم:

$$\Lambda^* = \left(-AA^t\right)^{-1}Ag \qquad (27)$$

به عنوان یک نتیجه از همگرایی، $M > 0$ وجود دارد بطوری که برای هر $\gamma > 0$ ، $\Lambda^* \leq M$ می‌باشد. لذا

$$\|d\|^* \leq \frac{\left\|A^t\Lambda^* + g\right\|}{\|\mathcal{H}\|} \leq \frac{\|A\|M + \|g\|}{\|\mathcal{H}\|}$$

جایی که:

$$\|\mathcal{H}\| = \gamma + \max_{i=1,\ldots,n}\left|\left(\frac{2}{\sigma^2} - \frac{4x_i^2}{\sigma^4}\right)exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right)\right|$$

به‌وضوح مشخص است اگر

$$\frac{\|A\|M + \|g\|}{\rho} - \max_{i=1,\ldots,n}\left|\left(\frac{2}{\sigma^2} - \frac{4x_i^2}{\sigma^4}\right)exp\left(-\frac{x_i^2}{\sigma^2}\right)\right| \leq \gamma$$

آنگاه $\|d\| \leq \rho$ خواهد بود، ازطرف دیگر با فرض $\rho_1 = \|d^*\|$، تابع لاگرانژی (۱۶) به فرم (۲۸) تبدیل می‌شود:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}d^t\ \mathcal{H}d + g^td + \Lambda^tAd + \mu\left(d^td - \rho_1^2\right) \qquad (28)$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.22034/20.3.19]

و لذا شرایط KKT آن به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\mathcal{H}d + g + A^t\Lambda + \mu d = 0,\ \ Ad = 0,\ \ d_2 \le \rho_1,\ \ \mu\left(d^t d - \rho_1^2\right) = 0$$

به‌وضوح مشخص است این شرایط برای $\Lambda = \Lambda^*, d = d^*$ و $\mu = 0$ برآورده می‌شوند. ■

الگوریتم ۱: جواب زیر مساله درجه دوم

ورودی:

A, g, H, γ

$\mathcal{H} = H + \gamma I$

$\Lambda = \left(-A\mathcal{H}^{-1}A^t\right)^{-1}\left(A\mathcal{H}^{-1}g\right)$

خروجی:

$d = -\mathcal{H}^{-1}\left(A^t\Lambda + g\right)$

الگوریتم ۲ جزییات روش پیشنهادی را نشان می‌دهد. حلقه بیرونی با هر مقدار اولیه $\sigma \ge \sigma_0$ که در آن σ_0 یک ثابت مثبت دلخواه است، مقدار دهی اولیه می‌شود. سپس، دنباله کاهشی از مقادیر σ تا زمانی که به آستانه σ_{min} برسند، ایجاد می‌شود که این پارامتر دقت تقریب‌های نرم صفر را کنترل می‌کند. شعاع ناحیه اعتماد ρ تا زمانی‌که (۱۵) برآورده شود، به طور متوالی کاهش می‌یابد. طول گام d توسط الگوریتم ۱ در طول تکرارها محاسبه می‌شود. اخیرا در [۱۲] الگوریتم مشابهی برای حل مساله (۲) ارایه‌شده که در موارد زیر با الگوریتم ۲ تفاوت دارد:

۱) کاهش تعداد پارامترهای الگوریتم با تغییر شرط حلقه بیرونی براساس تغییرات σ .

۲) کاهش تعداد موارد حل زیر مساله در یک تکرار. در [۱۲] زیر مساله به ازای مقادیر افزایشی پارامتر جریمه تا حصول یک جواب صادق در شرط ناحیه اعتماد حل می‌شود که این مورد در الگوریتم جدید حذف شده است.

۳) بهبود عملکرد روش که نتیجه اقدامات موارد ۱ و ۲ بوده است.

الگوریتم ۲: روش پیشنهادی

ورودی: $y, A, A^\dagger = A^t\left(AA^t\right)^{-1}$

پارامترها: $\gamma, c, \alpha, \sigma_{min}$

مقدار دهی اولیه:

$x = A^\dagger y, \sigma = 3 \times max|x|$

while $\sigma > \sigma_{min}$

  f, g, H, d محاسبه مقادیر

  if $d = 0$ خاتمه الگوریتم

    else if $\Delta f < \alpha \Delta q$

      $\gamma \leftarrow \gamma \times 1/2$

    end if

  end if

$\sigma \leftarrow c.\sigma$

end while

خروجی: x

در این بخش تحلیل همگرایی روش پیشنهادی ارایه می‌شود. اثبات همگرایی روش مبتنی بر نتایج به‌دست آمده

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.22034/20.3.19]

توسط فلچر و همکاران [۷، ۱۵] است و در این خصوص مفروضات استاندارد زیر در نظر گرفته می‌شود:

۱) تمام نقاطی که توسط الگوریتم تولید می‌شوند در ناحیه بسته و کراندار غیرتهی X قرار دارند.

۲) توابع $f_\sigma(x)$ و $c(x)$ در مجموعه باز شامل X دوبار مشتق پذیر پیوسته هستند.

۳) یک $M>0$ وجود دارد به طوری که ماتریس هسین H در رابطه $\|H\|_2 \le M$ صدق می‌کند.

یک نتیجه از فرضیات استاندارد این است که ماتریس های هسین $f_\sigma(x)$ و $c(x)$ روی X کراندار هستند و طبق فرض۲، روابط $\|\nabla^2 c(x)\|_2 \le M$ و $\|\nabla^2 f_\sigma(x)\|_2 \le M$ برای هر $x \in X$ برقرار است.

همگرایی سراسری روش پیشنهادی، با توجه به شرط*KKT*، تحت شرایط قیدی MFCQ ثابت می‌شود. نقطه موجه x_* در شرایط قیدی MFCQ صدق می‌کند اگر و تنها اگر:

- بردارهای $\nabla c_i(x_*)$ برای هر $i \in \mathcal{E}$ مستقل خطی است. که مجموعه $\mathcal{E}$ و $\mathcal{I}$ به ترتیب شامل مجموعه اندیس برای قیود تساوی و نامساوی هستند.
- بردار s وجود دارد به‌طوری که

$$s^t \nabla c_i(x_*) = 0 \quad , i \in \mathcal{E}$$
$$s^t \nabla c_i(x_*) < 0 \quad , i \in \mathcal{A}_*$$

که در آن $\mathcal{A}_* = \{i \in \mathcal{I} \mid c_i(x_*) = 0\}$ یعنی $\mathcal{A}_* \subset \mathcal{I}$ شامل قیدهای نامساوی که در x_* فعال هستند.

شرط لازم برای اینکه نقطه x_* مساله را حل کند این است که اولا شدنی باشد و ثانیا علاوه بر برقراری قیدی MFCQ مجموعه زیر تهی باشد.

$$\{s \mid s^t g(x_*) < 0 ,$$
$$s^t \nabla c_i(x_*) = 0, i \in \mathcal{E},$$
$$s^t \nabla c_i(x_*) < 0, i \in \mathcal{A}_*\}$$

قضیه۱: اگر مفروضات استاندارد برقرار باشد، آنگاه با فرض ثابت بودن σ یکی از حالات زیر اتفاق می افتد:

(الف) یک نقطه KKT برای مساله (۹) به‌دست می‌آید. یعنی $d=0$ زیر مساله $QP(x,\rho)$ را حل می‌کند.

(ب) یک نقطه تجمعی برای دنباله $\{x_k\}$ به‌دست می‌آید که موجه است. این نقطه KKT است و یا در شرایط MFCQ صدق نمی‌کند.

اثبات: حالت (الف) به‌وضوح برقرار است. لذا فقط حالت (ب) را اثبات می کنیم. ابتدا تقریب سری تیلور تابع $f_\sigma(x)$ را بصورت $f_\sigma(x_k+d) = f_\sigma(x_k) + g_k^t d + \frac{1}{2} d^t \nabla^2 f(y) d$ در نظر می‌گیریم که در آن y نقطه ای روی پاره خط x_k تا x_k+d می‌باشد. از (۱۳) و (۱۴) نتیجه می‌شود که

$$\Delta f_\sigma = -g_k^t d - \frac{1}{2} d^t \nabla^2 f(y) d \qquad (۲۹)$$

مقدار $\frac{1}{2} d^t H d$ را به عبارت (۲۹) اضافه و کم می‌کنیم:

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.22034/20.3.19]

$$\Delta f_\sigma = -g_k^t d - \frac{1}{2} d^t \nabla^2 f(y) d + \frac{1}{2} d^t H d - \frac{1}{2} d^t H d$$
$$\Delta f_\sigma = \Delta q - \frac{1}{2} d^t \left(\nabla^2 f(y) - H \right) d \quad (۳۰)$$

براساس $\left\| \nabla^2 f(y) \right\|_2 \le M$,$\|H\|_2 \le M$,$\|d\|_2 \le \rho$ داریم:

$$\begin{aligned} d^t \left(\nabla^2 f(y) - H \right) d &\le \|d\|_2 \left\| \nabla^2 f(y) - H \right\|_2 \|d\|_2 \\ &\le \|d\|_2^2 \left(\left\| \nabla^2 f(y) \right\|_2 + \|H\|_2 \right) \\ &\le 2M\rho^2 \end{aligned} \quad (۳۱)$$

نتیجه با به‌کارگیری روابط (۳۰) و (۳۱) داریم:

$$\Delta f_\sigma \ge \Delta q - M\rho^2 \quad (۳۲)$$

اکنون بر اساس برهان خلف فرض می کنیم که یک نقطه تجمع x^∞ وجود دارد که شرایط MFCQ را برآورده اما در شرایط KKT صدق نمی‌کند.

بر اساس لم ۵ از فلچر و همکاران [۷]، همسایگی $\mathcal{N}^\infty$ از x^∞ و ثابت های مثبت κ, ε وجود دارند، به‌گونه‌ای که برای همه $x \in \mathcal{N}^\infty \cap X$ و $0 \le \rho \le \kappa$ زیرمساله درجه دوم $QP(x,\rho)$ جواب شدنی d دارد که:

$$\Delta q \ge \frac{1}{3} \rho\varepsilon > 0 \quad (۳۲)$$

حال با تقسیم عبارت (۳۲) بر Δq و به‌کارگیری رابطه (۳۳) داریم:

$$\frac{\Delta f_\sigma}{\Delta q} \ge 1 - \frac{3\rho M}{\varepsilon}$$

و به‌طور معادل داریم:

$$\Delta f_\sigma \ge \alpha \Delta q \quad , \quad \alpha = 1 - \frac{3\rho M}{\varepsilon}$$

لذا اگر $\rho \le (1-\alpha)\varepsilon / (3M)$ باشد، آنگاه $\Delta f_\sigma \ge \alpha \Delta q > 0$ و در نتیجه دنباله مقادیر تابع $f_\sigma(x_k)$ به‌طور یکنواخت کاهشی می‌باشد. بنابراین $f_\sigma(x_k)$ روی مجموعه X کراندار و در نتیجه دنباله $\sum_{K \ge 1} \Delta f_\sigma(x_k)$ همگرا خواهد بود و به وضوح با این حقیقت $\Delta f_\sigma(x_k) \ge \alpha \Delta q(x_k) \ge \frac{1}{3} \alpha\rho\varepsilon$ در تناقض می‌باشد، بنابراین x^∞ یک نقطه KKT بوده و لذا حالت (ب) برقرار است. ■

۵ ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی

در این بخش عملکرد عددی الگوریتم پیشنهادی و کارایی آن در بازیابی بردارهای تُنک نشان داده می‌شود. ابتدا تاثیر پارامترهای گوناگون بر روی عملکرد روش بررسی و مقادیر اولیه کارآمدی برای آنها پیشنهاد می‌گردد. در ادامه نتایج مقایسه عددی با جدیدترین الگوریتم‌های شناخته‌شده در این زمینه گزارش می‌شود.

در آزمایش‌های انجام‌شده، از بردارهای تُنک و ماتریس حسگر A که به طور تصادفی ایجاد شده‌اند استفاده

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-30]

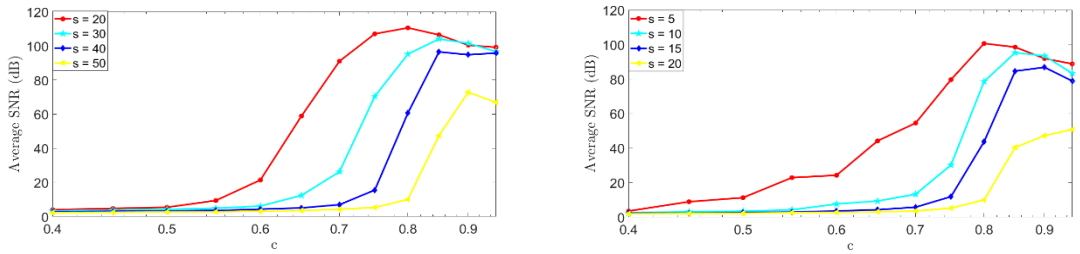
[DOI: 10.22034/20.3.19]

می‌شود و موقعیت مولفه‌های غیرصفر از مجموعه $\{1,...,n\}$به‌صورت تصادفی نمونه‌برداری می‌گردند که در آن $\|\bar{x}\|_0 = s$ است و در نهایت $y = A\bar{x}$در نظرگرفته می‌شود. از طرفی $\hat{x}$ برابر تقریب جواب بازیابی‌شده توسط الگوریتم ها در نظرگرفته شده است. شاخص عملکرد نرخ سیگنال به نویز[1] (SNR) به‌صورت زیر تعریف می گردد:

$$SNR(\hat{x},\bar{x}) = 10\log_{10}\frac{\|\bar{x}\|_2}{\|\bar{x}-\hat{x}\|_2}$$

آزمایش اول: در این آزمایش تاثیر پارامترهای σ_{min},α,c درکارایی روش پیشنهادی بررسی و برای یافتن مقادیر اولیه کارآمد، شاخص SNR مورد استفاده قرار می گیرد.

۱) تاثیر پارامتر c: اگر مقدار پارامتر c کم در نظر گرفته شود، احتمال گیر افتادن در جواب های موضعی زیاد می‌شود. از طرف دیگر، انتخاب نسبتاً بزرگ برای c باعث هموارسازی بیشتر در تابع SL0 می‌شود و احتمال رسیدن به جواب سراسری را بیشتر می‌کند. شکل ۲ میانگین شاخص SNR به‌عنوان تابعی از c برای ماتریس حسگر در ابعاد ۱۵۰ ×۵۰۰ و ۲۰۰ × ۱۰۰ را نشان می‌دهد. آزمایش ۵۰۰ بار تکرار و برای s های گوناگون مقدار SNR محاسبه شده است. وقتی s کوچک است، همانطور که انتظار می رود شاخص همیشه بزرگ است و از سوی دیگر، برای sهای به اندازه کافی بزرگ تقریباً بدون تغییر باقی می‌ماند. با بررسی نتایج $c = 0/9$ یک مقدار اولیه کارآمد در نظر گرفته می‌شود.



شکل۲. میانگین شاخص SNR روش پیشنهادی برای ماتریس در ابعاد $A_{500\times150}$ (سمت راست) و $A_{200\times100}$ (سمت چپ)

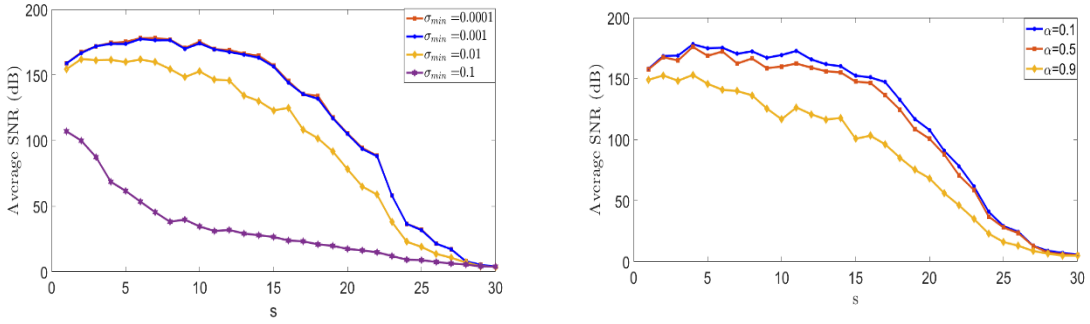
۲) تاثیر پارامتر α: در فرمول (۱۵) که نشان‌دهنده شرایط کاهش کافی است، پارامتر α بین صفر و یک تغییر می‌کند. با در نظر گرفتن مقادیر مختلف $\alpha = 0/1$ به عنوان مقدار اولیه کارآمد پیشنهاد می‌شود. آزمایش ۵۰۰ بار تکرار و میانگین نمودار شاخص SNR بر حسب s در شکل ۳ برای مقادیر مختلف α نشان داده شده است.

۳) تاثیر پارامتر σ_{min}: همان‌طور که در بخش ۲ اشاره شد، σپارامتر هموارسازی است. هرچه مقدار σ کوچکتر باشد دقت تقریب نرم صفر بهتر خواهد شد. پس از ۵۰۰ بار تکرار آزمایش، بهترین مقدار برای پارامتر σ_{min} بر اساس نتایج عددی ارایه‌شده $\sigma_{min}=10^{-3}$ می‌باشد. در شکل ۳ میانگین نمودار شاخص SNR بر حسب s برای مقادیر مختلف σ_{min} نشان داده شده است.

[1] Signal-to-Noise Ratio

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.22034/20.3.19]



شکل۳. میانگین شاخص SNR برای مقادیر مختلف α (سمت راست) و مقادیر مختلف σ_{min} (سمت چپ) برای ماتریس با ابعاد $A_{۵۰\times۱۵۰}$.

آزمایش دوم:

در این آزمایش، ابتدا به‌صورت مختصر متداول‌ترین الگوریتم‌های بازیابی سیگنال‌های تُنک که با روش پیشنهادی مقایسه شده‌اند معرفی و در ادامه عملکرد عددی و کارایی آنها با یکدیگر مقایسه می‌شود.

- Our Work: در روش پیشنهادی با استفاده از الگوریتم ۲ و پارامترهای زیر، مساله حل می‌شود.

$$c=۰/۹, \alpha=۰/۱, \sigma_{min}=۱۰^{-۳}$$

- SL0: این روش که در بخش ۲ تشریح شد برای حل مساله از مجموعه پارامترهای زیر استفاده می‌کند.

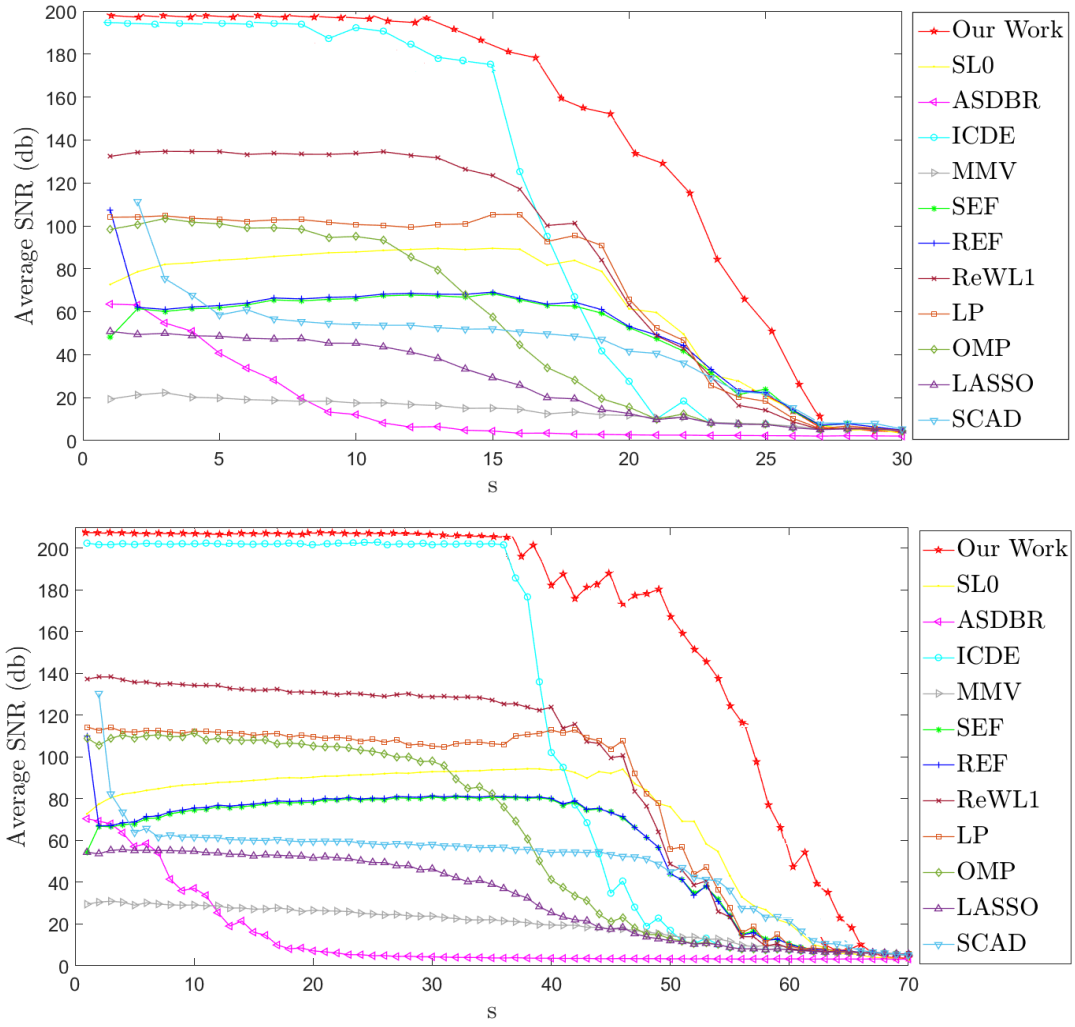
$$c=۰/۹, L=۸, \mu=۲, \sigma_{min}=۱۰^{-۴}$$

- Re-WL1[۱]: این روش به حل مساله بهینه‌سازی $\min_x \sum_{i=۱}^{n} \omega_i |x_i| \; s.t \; y=Ax$ می‌پردازد که در آن $\omega_۱, \omega_۲, \ldots, \omega_n$ وزن‌های مثبت می باشند [۱۶].
- LP[۲]: این روش مساله بهینه‌سازی $\min_x x_p \; s.t \; y=Ax$ را حل می‌کند و بر اساس روش تکراری Re-WL1 توسعه یافته است. مقدار $p=۰/۵$ به عنوان پارامتر کارآمدی معرفی شده است [۱۷].
- LASSO[۳]: این روش مساله بهینه‌سازی $\min_x \lambda x_۱ + Ax - y^۲$ را حل می‌کندکه در آن λ پارامتر منظم سازی و Φ تابع چگالی تجمعی می باشند [۱۸].
- SCAD[۴]: این الگوریتم از یک تابع جریمه غیرمحدب به‌جای نرم یک برای تضمین تُنک‌سازی استفاده می‌کند [۱۹]. پارامترهای اولیه مورد استفاده روش $a=۳/۷, \tau=۱۰^{-۳}$ می‌باشد.
- SEF[۵] و REF[۶]: این الگوریتم مساله بهینه‌سازی $\min_x Ax - y^۲ + \lambda g(x)$ را حل می‌کند [۲۰].
- MMV[۷] و ICDE[۸] و ASDBR[۹] و OMP[۱۰]: برای مشاهده جزییات به [۲۱-۲۴] مراجعه نمایید.

[1] Re-Weighted L1
[2] LP quasi-norm
[3] Least Absolute Shrinkage and Selection Operator
[4] Smoothly Clipped Absolute Deviation
[5] Shannon Entropy Function
[6] Renyi Entropy Function
[7] Multiple Measurement Vector
[8] Iterative Co-support Detection Estimation
[9] Adaptive Support Driven Bayesian Reweighted
[10] Orthogonal Matching Pursuit

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-30]
[DOI: 10.22034/20.3.19]

پارامتر مهمی که درخصوص ارایه کارایی روش پیشنهادی وجود دارد، بررسی وضعیت ابعاد ماتریس حسگر A می‌باشد. در این آزمایش نسبت تعداد ستون‌ها به تعداد سطرهای $(\frac{n}{m})$ماتریس حسگر $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ در دو حالت مختلف با ابعاد ۱۵۰×۵۰ $(\frac{n}{m}=۳)$ و ۲۰۰×۱۰۰ $(\frac{n}{m}=۲)$ در نظر گرفته شد و شاخص عملکرد SNR محاسبه و پس از ۵۰۰ بار تکرار، میانگین آن گزارش شد. شکل ۴ نمودار میانگین شاخص SNR برحسب s برای ماتریس در ابعاد ۱۵۰×۵۰ و ۲۰۰× ۱۰۰را نشان می‌دهند. در هر دو بخش شکل مشاهده می‌شود که مقدار شاخص SNR روش پیشنهادی از سایر الگوریتم ها بیشتر است که گویای کارایی و عملکرد بهتر آن می‌باشد.



شکل ٤. مقایسه روش پیشنهادی با سایر روش ها برای ماتریس در ابعاد $A_{۵۰\times۱۵۰}$ (بخش بالا) و $A_{۱۰۰\times۲۰۰}$ (بخش پایین)

٦ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله، روش برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی اصلاح‌شده برای حل مسایل بهینه‌سازی بازیابی تُنک پیشنهاد شد که در تابع هدف به‌جای نرم صفر از نرم هموارشده آن استفاده شد. روش معرفی‌شده از رویکرد جدیدی برای حل زیرمسایل استفاده می‌کند و در نتیجه حل‌کننده کارآمدی معرفی می‌نماید که منجر به کاهش پیچیدگی محاسبات و ارایه جواب‌های صریح و دقیق مساله در ابعاد مختلف می‌گردد.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.22034/20.3.19]

در مقاله جواب صریح و دقیق زیر مساله در قالب لم۱ و همگرایی فرو معین آن در قالب قضیه ۱ ارایه می‌شود. برای ارزیابی کار، ابتدا الگوریتم‌های بازیابی سیگنال‌های تُنک معرفی شدند و در ادامه با آزمایش‌های گسترده بر روی مسایل در ابعاد مختلف، نشان داده شد که در همه موارد، روش پیشنهادی از الگوریتم‌های معرفی‌شده در این زمینه بهتر عمل می‌کند.

در تحقیقات آتی می‌توان موارد زیر را در نظر گرفت:

۱) در سال‌های اخیر، مساله بازیابی مسایل تنک غیرمنفی و ماتریس‌های رتبه پایین مورد توجه محققان قرارگرفته است. لذا می‌توان از روش پیشنهادی ارایه‌شده در این زمینه‌ها بهره‌مند شد.

۲) بازسازی تصاویر در زمینه‌های پزشکی کاربردهای فراوانی دارد و بسیار مورد توجه است. روش پیشنهادی ارایه شده می‌تواند در بازسازی تصاویر MRI مغزی یا شبکیه چشم به‌کارگیری شود.

۳) در نظرگرفتن مساله به‌صورت چندلایه و حل هرکدام از آنها با کمک پردازش موازی منجر به کاهش پیچیدگی و زمان اجرای روش در حل مسایل ابعاد بزرگ خواهد شد.

۴) در این مقاله روش پیشنهادی برای یافتن جواب‌های تنک، از نرم صفر هموارشده در تابع هدف استفاده می‌نماید که می‌توان به‌جای آن از سایر نرم‌ها بهره‌مند شد.

۵) حل مساله ارایه‌شده در مقاله براساس الگوریتم برنامه‌ریزی درجه دوم متوالی و روش‌های جریمه می‌باشدکه می‌توان به‌جای آن، روش فیلتر را مورد بررسی قرار داد.

منابع

[1] Malek-Mohammadi, M., Jansson, M., Owrang, A., Koochakzadeh, A., Babaie-Zadeh, M., (2014). DOA estimation in partially correlated noise using low-rank/sparse matrix decomposition. IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop, 373-376.

[2] Donoho, D. L., Elad, M., (2003). Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via l1 minimization. Proc of the National Acadmy of Sciences, 100(5).

[3] Donoho, D. L., Huo, X., (2001). Uncertainty principles and ideal decomposition. IEEE Trans. Inform. Theory, 47, 2845-2862.

[4] Elad, M., Bruckstein, A., (2002). A generalized uncertainty principle and sparse representaions in pairs or bases. IEEE Trans. Inform. Theory, 48, 2558-2567.

[5] Donoho, D. L., (2004). For most large underdetermined systems of linear equation the minimal l1 norm solution is also the sparsest solution. Tech. Rep.

[6] Mohimani, H., Babaie-Zadeh, M., Jutten, C., (2009). A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed ℓ0 norm. IEEE Trans. Signal Process, 57(1), 289-301.

[7] Fletcher, R., Leyffer, S., Toint, P. L., (2000). On the Global Convergence of a Filter-SQP Algorithm. Technical Report 00/15, Department of Mathematics, University of Namur, Namur, Belgium.

[8] Jinming, W., Haifeng, L., (2021). Binary sparse signal recovery with binary matching pursuit. Inverse Problems, vol. 37(6),14-65.

[9] Liu, R., Shu, M., Chen, C., (2021). ECG Signal Denoising and Reconstruction Based on Basis Pursuit. Applied Sciences, 11(4).

[10] Wan, A., (2020). Uniform RIP Conditions for Recovery of Sparse Signals by $\ell_p\ (0 < p \leq 1)$ Minimization. IEEE Transactions on Signal Processing, 68, 5379-5394.

[11] Chen, S. S., Donoho, D. L., Saunders, M. A., (1999). Atomic decomposition by basis pursuit. SIAM J. Sci. Comput., 20(1), 33-61.

[12] Alamdari, M. S., Fatemi, M., Ghaffari, A. (2023). A modified sequential quadratic programming method for sparse signal recovery problems. Signal Processing, 207, 108955.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.22034/20.3.19]

[13] Bidabadi, N., (2021). Using an Efficient Penalty Method for Solving Linear Least Square Problem with Nonlinear Constraints. Journal of Operational Research and Its Applications, 18(4), 21-31. (In Persian)
[14] Alamdari, M. S., Fatemi, M. (2023). Presenting a new method to separate fetal heart signals from the mother by using sequential quadratic programming. Journal of Advanced Mathematical Modeling, 13(1), 153-167. (In Persian)
[15] Fletcher, R., (2010). The Sequential Quadratic Programming. Method Nonlinear optimization, Lecture Note in mathematics, 165-214.
[16] Candes, E.J., Wakin, M.B., Boyd, S.P., (2008). Enhancing sparsity by reweighted ℓ1-minimization. Journal of Fourier analysis and applications, 14(5), 877-905.
[17] Foucart. S., Lai, M., (2009). Sparsest solutions of under‐determined linear systems via ℓq-minimization for $0 < q \leq 1$. Appl. Comput. Harmon. Anal., 26(3), 395-407.
[18] Belloni, A., Chernozhukov, V., Wang, L., (2011). Square-root lasso: pivotal recovery of sparse signals via conic programming. Biometrika, 98(4), 791806.
[19] Fan, J., Li, R., (2001). Variable selection via nonconcave penalized likelihood and its oracle properties. Journal of the American statistical Association, 96(456), 1348-1360.
[20] Huang, S., Tran, T.D., (2019). Sparse signal recovery via generalized entropy functions minimization. IEEE Trans. Signal Process, 67(5), 1322–1337.
[21] Song, H., Ren, X. Lai, Y., Meng, H., (2021). Sparse analysis recovery via iterative cosup-port detection estimation, IEEE Access, 9, 38386–38395.
[22] Zonglong, B., Shi, L., Sun. J., Christensen, M., (2020). Complex sparse signal recovery with adaptive laplace priors.
[23] Li, J., Zhou, W., Cheng, C., (2021). Adaptive support-driven Bayesian reweighted algorithm for sparse signal recovery. SIViP, 15, 1295–1302.
[24] Chen, C.X., Jianzhong, L., Jiandong, C., (2022). A new result on recovery sparse signals using orthogonal matching pursuit. Stat. Theory Relat. Fields, 1–7.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-30]

[DOI: 10.22034/20.3.19]