مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال نوزدهم، شماره چهارم (پیاپی ۷۵)،زمستان ۰۱، ص ص ۱۲۶-۱۱۳
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

روش تکرار وردشی چندگامی بهینه برای حل دستگاه همزیستی دو نوع موجود زنده بر هم اثرگذار

صادق پورجعفر[۱]، زینب آیاتی[۲*]

۱- استادیار، گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

۲- استادیار، دانشگاه گیلان، دانشکده فنی شرق، گروه علوم مهندسی، رودسر، ایران

رسید مقاله: ۲۷ بهمن ۱۴۰۰

پذیرش مقاله: ۸ مرداد ۱۴۰۱

چکیده

در این مقاله، یک تعمیم جدید از روش تکرار وردشی برای حل دستگاه معادلات انتگرال دیفرانسیل شکار و شکارچی که بیانگر همزیستی دو نوع موجود زنده بر هم اثرگذار می‌باشد، ارایه شده است. تابع خطا برای هر معادله و در نتیجه حداکثر خطا در بازه مفروض برای تکرارهای متوالی، به‌دست آمده است. بازه مفروض به n زیر بازه با طول یکسان تقسیم گردیده و یک تکرار بهینه از VIM بر اساس به حداقل‌رساندن حداکثر خطا در اولین زیر بازه، انتخاب شده است. سپس، یک روش تکرار وردشی چندگامی جدید اعمال می‌گردد. در روش پیشنهادی، روش تکرار وردشی فقط در اولین زیر بازه ویژه اجرا و از مقدار جواب در پایان هر گام به عنوان شرط اولیه گام بعدی مجدداً در اولین زیر بازه استفاده شده است. در پایان، جواب هر زیر بازه به مکان واقعی آن انتقال داده شده است. نشان داده شده که خطای جواب به‌دست آمده با روش پیشنهادی به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد.

کلمات کلیدی: روش تکرار وردشی، روش تکرار وردشی چندگامی، دستگاه معادلات انتگرال دیفرانسیل، جواب بهینه، گونه‌های بیولوژیکی.

۱ مقدمه

همانطور که می‌دانیم، مدل بسیاری از پدیده‌های طبیعی منجر به معادلات دیفرانسیل غیرخطی در علوم مختلف می‌شود و به‌دست آوردن جواب‌های تحلیلی یا عددی با دقت مناسب بسیار مهم است. به منظور دستیابی به این هدف، روش‌های مختلفی برای معادلات خطی و غیرخطی تا کنون ارایه داده شده است ، مانند روش آشفتگی هموتوپی [۳-۱] (HPM) ، روش تجزیه آدومین [۶-۴] (ADM)، روش تکراری وردشی [۱۳-۷] (VIM)، روش آنالیز هموتوپی [۱۴] (HAM)، روش مجانبی هموتوپی بهینه [۱۵] (OHAM)، و غیره [۲۴-۱۶]. در تمامی این

* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: Zainab.ayati@guilan.ac.ir & ayati.zainab@gmail.com

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.113]

روش‌ها برای رسیدن به دقت مورد نظر، مجبور به اجرای تکرارهای بیشتری از روش هستیم که مستلزم محاسبات بیشتر و در نتیجه بالا رفتن خطای محاسباتی می‌باشد. در این مقاله سعی‌شده با تقسیم بازه و تعیین تعداد تکرار بهینه حداکثر خطا مینیمم گردد.

در مقاله حاضر، سیستم معادلات شناخته‌شده زیر به نام شکار و شکارچی که اغلب برای توصیف پویایی سیستم‌های بیولوژیکی استفاده می‌شود در نظر گرفته می‌شود که در آن دو گونه با هم تعامل دارند، یکی به عنوان شکارچی و دیگری به عنوان طعمه.

$$\begin{cases} \dfrac{dn_1(t)}{dt} = n_1(t)\left[K_1 - \gamma_1 n_2(t) - \int_{t-T_2}^{t} f_1(t-s)n_2(s)ds \right], \\ \dfrac{dn_2(t)}{dt} = n_2(t)\left[-K_2 + \gamma_2 n_1(t) + \int_{t-T_1}^{t} f_2(t-s)n_1(s)ds \right], \end{cases} \quad (1)$$

در معادلات بالا، K_1, K_2, γ_1 , γ_2 پارامترهای معلوم هستند و $n_1(0), n_2(0)$ به عنوان شرایط اولیه داده شده‌اند. n_2 تعداد شکارچی‌ها و n_1 تعداد طعمه‌ها می‌باشد. معادله اول به معادله شکار و معادله دوم به معادله شکارچی معروف هستند. k_1 شاخص رشد شکارشدن، γ_1 شاخص رشد شکارها، $\gamma_2 n_1 n_2$ نشان‌دهنده افزایش جمعیت شکارچی‌ها و $k_2 n_2$ نشان‌دهنده مرگ طبیعی آنهاست. این معادله اولین بار توسط لوتکا و ولترا معرفی شده و به همین دلیل به معادله لوتکا – ولترا نیز شناخته شده است.

در این مقاله دستگاه معادلات شکار و شکارچی با دو روش نیمه‌عددی تکرار وردشی و روش تکرار وردشی چندگامی بهینه حل می‌شود در روش تکرار وردشی چند گامی بهینه نخست سعی می‌شود تکرار مناسبی از VIM بر اساس مینیمم‌کردن ماکزیمم خطا در اولین زیر بازه انتخاب گردد. سپس اجرای VIM در زیر بازه نخست برای هرگام صورت گرفته، نهایتاً جواب‌های به‌دست آمده به زیر بازه اصلی، انتقال می‌یابند.

۲ روش‌های تکرار وردشی و تکرار وردشی چندگامی بهینه

روش تکرار وردشی توسط J. He در سال ۱۹۹۸ پیشنهاد شده است و بسیاری از مسایل را با تقریبی قابل قبول حل می کند [۱۸-۱۶]. معادله غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$G(x) = g(x).$$

فرض کنید $G(x)$ را به دو قسمت که یکی از آن‌ها یک عملگر خطی و دیگری یک عملگر غیرخطی است وبه ترتیب با L و N نشان داده می‌شود، تقسیم نمودیم. بنابراین معادله به صورت زیر تغییر می کند

$$L(x) + N(x) = g(x), \quad (2)$$

که $g(x)$ یک تابع تحلیلی است. ابتدا بر اساس VIM یک تابعک تصحیح ساخته‌شده، سپس معادله پیشنهادی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$U_{n+1}(x) = U_n(x) + \int_0^x \lambda(s)(LU_n(s) + N\tilde{U}_n(s) - g(s))ds. \quad (3)$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.113]

که λ را ضریب لاگرانژ نامند [۱۹]، و مقدار بهینه آن توسط VIM به‌دست می‌آید [۲۰]. اندیس $''n''$ تقریب مرتبه n -ام را نشان می‌دهد. $\tilde{U}_n$ نشان‌دهنده تغییرات محدود است، یعنی $\delta\tilde{U}_n = ۰$ تقریب اولیه قابل دستیابی با توجه به شرایط اولیه است.

با محاسبه مقدار بهینه λ و جایگذاری در (۳)، و با استفاده از محاسبات متوالی از رابطه (۳)، می‌توان تقریب مطلوبی از جواب را به دست آورد. همگرایی این روش و کران خطای جواب به‌دست آمده در هر مرحله در [۲۵] بیان شده است.

معمولاً برای حل مساله توسط MVIM، بازه موردنظر را به چند زیر بازه تقسیم کرده و برای هر کدام از آنها VIM اعمال می‌شود، مقدار جواب در نقطه انتهایی هر زیربازه به عنوان مقدار اولیه بازه بعدی در نظر گرفته می‌شود. انگیزه این عمل استفاده از بسط جواب در بازه‌ای با شعاع کمتر در نزدیکی شرط اولیه به منظور مینیمم کردن خطای جواب به‌دست آمده است. ولی ایده مقاله استفاده از تکرار مناسبی از VIM با هدف به حداقل رساندن حداکثر خطا در اولین زیربازه مناسب است. سپس VIM برای هر زیر بازه تنها در اولین زیربازه و با شرایط اولیه مقادیر آخر هر گام برای ابتدای گام بعدی صورت گرفته، نهایتاً جواب هر گام به زیربازه اصلی منتقل می‌شود. نشان داده می‌شود که MVIM به‌کار رفته در این مقاله خطایی بسیار کمتر و قابل ملاحظه نسبت به VIM و MVIM معمولی دارد.

برای به‌کار بردن روش‌های مذکور روی معادله (۱)، طرح تکراری زیر نوشته می‌شود

$$\begin{cases} n_{۱,n+۱}(t) = n_{۱,n}(t) + \int_{۰}^{t} \left(\dfrac{dn_{۱,n}(\xi)}{d\xi} - n_{۱,n}(\xi) \left[K_۱ - \gamma_۱ . n_{۲,n}(\xi) - \int_{\xi - T_۰}^{\xi} f_۱(\xi - s)\, n_{۲,n}(s)\, ds \right] \right) d\xi, \\ n_{۲,n+۱}(t) = n_{۲,n}(t) + \int_{۰}^{t} \left(\dfrac{dn_{۲,n}(\xi)}{d\xi} - n_{۲,n}(\xi) \left[-K_۲ + \gamma_۲ . n_{۱,n}(\xi) + \int_{\xi - T_۰}^{\xi} f_۲(\xi - s)\, n_{۱,n}(s)\, ds \right] \right) d\xi. \end{cases} \quad (۴)$$

با در نظر گرفتن تابعک تصحیح زیر

$$\begin{cases} n_{۱,n+۱}(t) = n_{۱,n}(t) + \int_{۰}^{t} \lambda_۱(\xi) \left(\dfrac{dn_{۱,n}(\xi)}{d\xi} - \tilde{n}_{۱,n}(\xi) \left[K_۱ - \gamma_۱ . \tilde{n}_{۲,n}(\xi) - \int_{\xi - T_۰}^{\xi} f_۱(\xi - s)\, \tilde{n}_{۲,n}(s)\, ds \right] \right) d\xi, \\ n_{۲,n+۱}(t) = n_{۲,n}(t) + \int_{۰}^{t} \lambda_۲(\xi) \left(\dfrac{dn_{۲,n}(\xi)}{d\xi} - \tilde{n}_{۲,n}(\xi) \left[-K_۲ + \gamma_۲ . \tilde{n}_{۱,n}(\xi) + \int_{\xi - T_۰}^{\xi} f_۲(\xi - s)\, \tilde{n}_{۱,n}(s)\, ds \right] \right) d\xi, \end{cases} \quad (۵)$$

و با توجه به ویژگی تغییرات محدود یعنی $\delta\tilde{n}_{i,n} = ۰$، ضرایب لاگرانژ را از شرایط زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \lambda'_۱(\xi) = ۰, \quad ۱ + \lambda_۱(\xi)\big|_{\xi = t} = ۰, \\ \lambda'_۲(\xi) = ۰, \quad ۱ + \lambda_۲(\xi)\big|_{\xi = t} = ۰, \end{cases} \quad (۶)$$

از حل معادلات بالا داریم $\lambda_۱ = \lambda_۲ = -۱$.

بنابراین (۵) به صورت زیر نوشته می‌شود

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.113]

$$\begin{cases} n_{1,n+1}(t) = n_{1,n}(t) - \int_{0}^{t} \left(\frac{dn_{1,n}(\xi)}{d\xi} - n_{1,n}(\xi) \left[K_1 - \gamma_1 . n_{2,n}(\xi) - \int_{\xi - T_0}^{\xi} f_1(\xi - s) . n_{2,n}(s) ds \right] \right) d\xi, \\ n_{2,n+1}(t) = n_{2,n}(t) - \int_{0}^{t} \left(\frac{dn_{2,n}(\xi)}{d\xi} - n_{2,n}(\xi) \left[-K_2 + \gamma_2 . n_{1,n}(\xi) + \int_{\xi - T_0}^{\xi} f_2(\xi - s) n_{1,n}(s) ds \right] \right) d\xi, \end{cases} \quad (۷)$$

که K_i, γ_i, $n_{i,n}(0)$ و توابع $f_i(\xi - s)$ برای $i = 1,2$ معلوم هستند و لذا جواب‌های تقریبی معادله از رابطه فوق قابل محاسبه می‌باشند.

همچنین خطای جواب به‌دست آمده در مرحله k ام، از ربطه زیر به‌دست آمده است

$$\begin{cases} en_{1k} = \left| \frac{dn_{1k}(t)}{dt} - n_{1k}(t) \left[K_1 - \gamma_1 n_{2k}(t) - \int_{t-T_0}^{t} f_1(t-s) n_{2k}(s) ds \right] \right|, \\ en_{2k} = \left| \frac{dn_{2k}(t)}{dt} - n_{2k}(t) \left[-K_2 + \gamma_2 n_{1k}(t) + \int_{t-T_0}^{t} f_2(t-s) n_{1k}(s) ds \right] \right|. \end{cases}$$

۳ مثال‌های عددی

مساله شکار و شکارچی را به صورت دستگاه زیر از معادلات دیفرانسیل انتگرال در نظر بگیرید [۶]،

$$\begin{cases} \frac{dn_1(t)}{dt} = n_1(t) \left[K_1 - \gamma_1 n_2(t) - \int_{t-T_0}^{t} f_1(t-s) n_2(s) ds \right], \\ \frac{dn_2(t)}{dt} = n_2(t) \left[-K_2 + \gamma_2 n_1(t) + \int_{t-T_0}^{t} f_2(t-s) n_1(s) ds \right], \end{cases}$$

با شرایط اولیه و مقادیر عددی زیر

$$\begin{cases} n_1(0) = 10, \ K_1 = 0/02, \ \gamma_1 = 0/01, \\ n_2(0) = 10, \ K_2 = 0/01, \ \gamma_2 = 0/01, \end{cases} \quad T_0 = 0/1, \ f_1(t-s) = f_2(t-s) = e^{-(t-s)}.$$

ابتدا جواب تقریبی را با روش VIM به‌دست می‌آوریم و سپس، تابع خطا را محاسبه می‌کنیم. ایده ما برای استفاده از MVIM ، به حداقل رساندن حداکثر خطا به ویژه در بازه اولیه تکرارها است. نتایج VIM و MVIM با بهترین تکرار در برخی نقاط مقایسه می‌شود.

نتایج عددی به کمک VIM

در این بخش چند تقریب اولیه VIM محاسبه می‌شود و حداکثر خطا را در بازه مفروض به‌دست می‌آوریم. در هر تکرار، معادلات تقریبی به‌دست آمده و منحنی‌های آن‌ها رسم شده است. سپس یک تکرار ویژه با کمترین خطا در اولین زیر بازه برای استفاده از MVIM انتخاب شده است. با استفاده از روش ذکرشده ، جواب سیستم شکار و شکارچی با اولین تکرار به‌دست می‌آید.

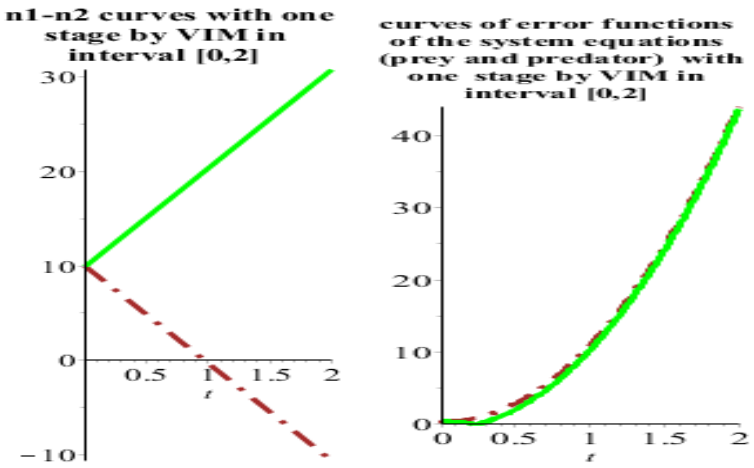
[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.113]

$$\begin{cases} n_{1,1}(t) = ۱۰ - ۱۰/۳۱۶۳\ t, \\ n_{1,2}(t) = ۱۰ + ۱۰/۴۱۶۳\ t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} en_{1,1}(t) = |۰/۴۸۷۴ - ۰/۸۱۴۱\ t + ۱۱/۳۰۰۴\ t^{۲}|, \\ en_{1,2}(t) = |-۰/۴۸۲۷ - ۰/۵۰۳۸\ t + ۱۱/۳۰۰۴\ t^{۲}|. \end{cases}$$

منحنی جواب‌های تقریبی و خطاهای اولین تکرار در شکل ۱ رسم شده است.



شکل ۱. منحنی جواب و خطای جواب به‌دست آمده توسط VIM برای تکرار اول در بازه [۲ ، ۰]

جواب به‌دست آمده از دستگاه توسط VIM برای مرحله اول منجر به خطای حداکثربرابر ۴۴/۰۶۰۶ برای معادله شکار و حداکثر خطا معادل با ۴۳/۷۱۱۵ برای معادله شکارچی در فاصله [۲ ، ۰] می‌شود. اما در بازه [۰/۵ ، ۰] حداکثر خطاها به ترتیب به ۲/۹۰۵۳و ۲/۰۹۰۵ برای معادلات شکار و شکارچی کاهش می‌یابد.

جواب‌های زیر، جواب‌های تقریبی n_1 ، n_2 و معادلات خطای آن ها با استفاده از VIM است که در تکرار دوم و سوم به‌دست می‌آیند

$$\begin{cases} n_{2,1}(t) = ۱۰/۰۰ - ۹/۸۲۸۹\ t + ۳/۷۶۶۹\ t^{۳} - ۰/۴۰۷۲\ t^{۲}, \\ n_{2,2}(t) = ۱۰/۰۰ + ۱۰/۸۹۹۰\ t - ۳/۷۶۶۸\ t^{۳} + ۰/۲۵۱۹\ t^{۲}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} en_{2,1}(t) = |۰/۰۲۱۰ - ۰/۴۸۶۷\ t^{۲} - ۰/۹۴۸۶\ t + ۱/۵۱۱۱\ t^{۳} - ۸/۱۵۶۵\ t^{۴} + ۱/۴۹۲۱\ t^{۶} - ۰/۴۶۰۲\ t^{۵}|, \\ en_{2,2}(t) = |۰/۰۲۴۹ + ۰/۵۶۸۴\ t^{۲} - ۱/۰۸۴۵\ t + ۱/۴۳۶۲\ t^{۳} - ۸/۱۵۹۳\ t^{۴} + ۱/۴۹۲۱\ t^{۶} - ۰/۴۶۰۲\ t^{۵}|. \end{cases}$$

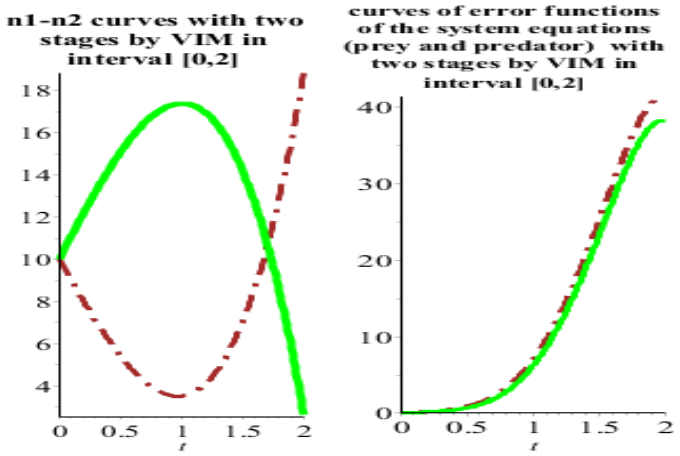
$$\begin{cases} n_{3,1}(t) = ۱۰/۰۰ - ۹/۸۰۸۰t + ۳/۶۰۴۶t^{۳} - ۰/۸۸۱۵t^{۲} + ۰/۲۱۳۲t^{۷} - ۰/۰۷۶۷t^{۶} - ۱/۶۳۱۳\ t^{۵} + ۰/۳۷۷۸\ t^{۴}, \\ n_{3,2}(t) = ۱۰/۰۰ + ۱۰/۸۷۴۰\ t - ۳/۹۵۶۳\ t^{۳} + ۰/۷۹۴۱\ t^{۲} - ۰/۲۱۳۷\ t^{۷} + ۰/۰۷۶۷t^{۶} + ۱/۶۳۱۸\ t^{۵} - ۰/۳۵۹۰\ t^{۴}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} en_{3,1}(t) = |-۰/۰۰۲۹ - ۱/۶۷۴۳t^{۸} + ۰/۴۲۹۷t^{۱۰} - ۰/۳۲۱۰t^{۹} + ۰/۰۰۴۸t^{۱۴} - ۰/۰۰۵۰t^{۱۳} - ۰/۰۷۱۲t^{۱۲} + ۰/۰۶۲۰t^{۱۱} \\ \qquad + ۱/۳۴۷۷t^{۳} - ۰/۲۲۱۶t^{۲} + ۱/۰۴۷۳t^{۷} + ۳/۲۶۷۳t^{۶} - ۱/۶۴۱۳t^{۵} + ۰/۶۱۳۸t^{۴} + ۰/۰۶۰۵t|, \\ en_{3,2}(t) = |۰/۰۰۲۴ - ۰/۰۳۴۷t - ۱/۶۷۴۱t^{۸} + ۰/۴۲۹۸t^{۱۰} - ۰/۳۲۲۴t^{۹} + ۰/۰۰۴۸t^{۱۴} - ۰/۰۰۵۰t^{۱۳} - ۰/۰۷۱۲t^{۱۲} \\ \qquad + ۰/۰۶۲۰t^{۱۱} + ۱/۵۵۱۳\ t^{۳} - ۰/۲۱۹۷\ t^{۲} + ۱/۰۵۲۸\ t^{۷} + ۳/۴۰۵۷\ t^{۶} - ۱/۶۹۵۲\ t^{۵} - ۰/۱۳۶۸\ t^{۴}|. \end{cases}$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

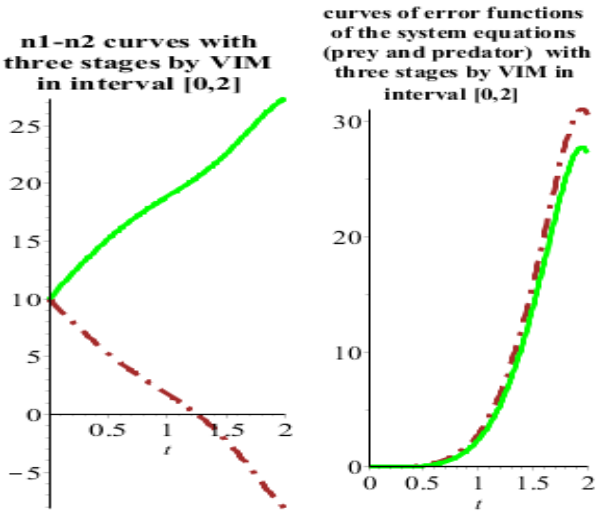
[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.113]

منحنی جواب‌های تقریبی و خطاهای تکرار دوم و سوم در شکل های ۲ و ۳ ترسیم شده‌اند.



شکل ۲. منحنی ها و خطای جواب بدست آمده توسط VIM برای تکرار دوم در بازه [۲، ۰].

حداکثر خطای جواب‌های دستگاه توسط VIM در تکرار دوم برای معادله شکار برابر ۴۳/۷۱۱۵و برای معادله شکارچی ۳۸/۲۵۳۰در بازه [۲، ۰] می‌باشد. اما در زیر بازه [۰/۵ ، ۰]، حداکثر خطاها به ترتیب به ۰/۸۸۷۱ و ۰/۶۹۷۰برای معادلات شکار و شکارچی کاهش می‌یابند. جواب‌های دستگاه توسط VIM در مرحله سوم حداکثر خطا را برای معادله تقریبی شکار برابر ۳۱/۱۱۷۳و حداکثر خطا را برای معادله تقریبی شکارچی در فاصله [۲ ، ۰] برابر ۲۷/۷۸۱۳تعیین می‌کند. در حالی که در بازه [۰/۵، ۰]، حداکثر خطاها به ترتیب به ۰/۱۸۰۰و ۰/۱۱۷۲برای معادلات شکار و شکارچی کاهش می‌یابند.

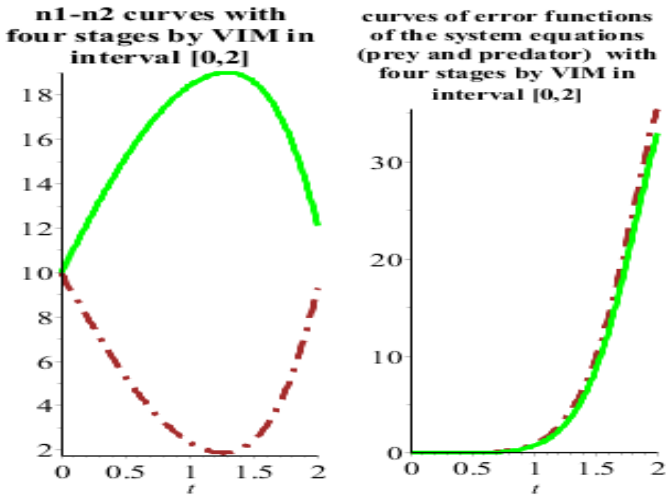


شکل ۳. منحنی‌ها و خطای جواب به‌دست آمده توسط VIM برای تکرار سوم در بازه [۲، ۰].

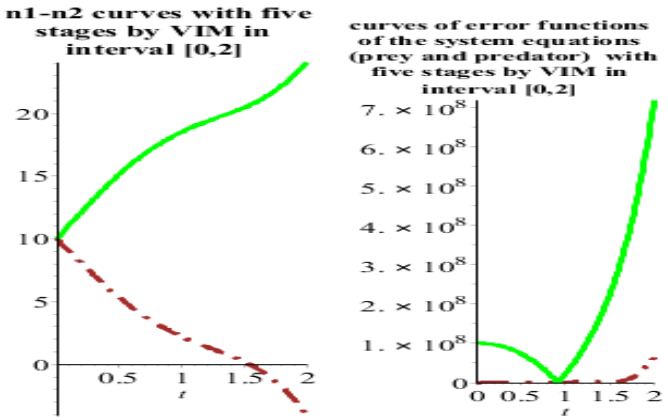
[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.113]

منحنی‌های تکرار چهارم و پنجم معادلات و خطاهای تقریبی توسط VIM بدون تقسیم بازه اولیه در شکل (۴) و (۵) ترسیم شده‌اند. جواب دستگاه توسط VIM برای مرحله چهارم حداکثر خطا را ۳۵/۵۰۵۷ برای معادله شکار و ۳۲/۹۱۵۱ برای معادله شکارچی در بازه [۲، ۰] تعیین می کند. اما در بازه [۰/۵، ۰] حداکثر خطاها به ترتیب ۰/۰۲۸۹و ۰/۰۱۷۵برای معادلات شکار و شکارچی کاهش می‌یابند. همان‌طور که در شکل ۵ مشاهده می کنید، خطای سیستم بسیار افزایش می‌یابد. بنابراین، جواب به‌دست آمده با تکرار پنجم VIM نامطلوب است. با توجه به این که انتظار می‌رود با افزایش تعداد جملات جواب تقریبی، میزان خطا کاهش یابد، متأسفانه وضعیت بدتر می‌شود. جواب با تکرار ششم و هفتم VIM ، مانند پنجم ، وضعیت مطلوبی ندارد. منحنی‌های وابسته و معادلات خطای آن ها در شکل ۶ و ۷ نشان داده شده‌اند.



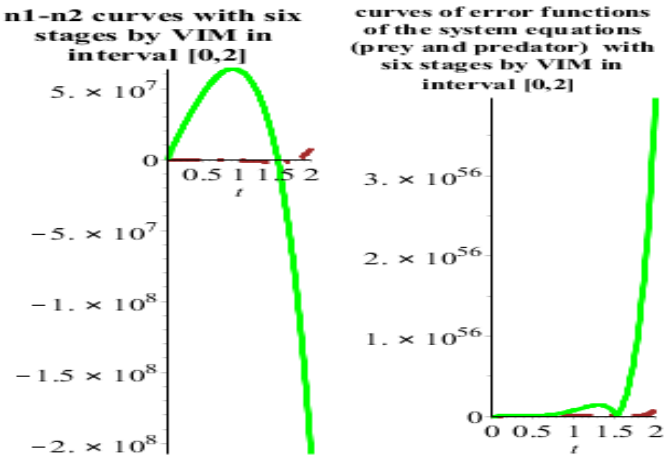
شکل ٤. منحنی‌ها و خطای جواب به‌دست آمده توسط VIM برای تکرار چهارم در بازه [۲، ۰].



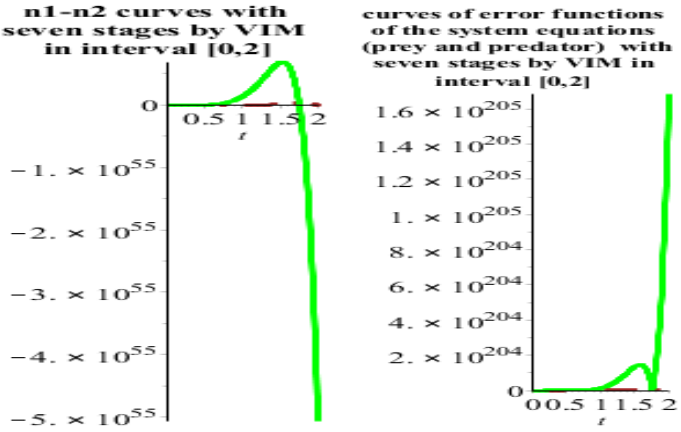
شکل ۵. منحنی‌ها و خطای جواب به‌دست آمده توسط VIM برای تکرار پنجم در بازه [۲، ۰].

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.113]



شکل ٦. منحنی‌ها و خطای جواب به‌دست آمده توسط VIM برای تکرار ششم در بازه [۲، ۰].



شکل ۷. منحنی‌ها و خطای جواب به‌دست آمده توسط VIM برای تکرار هفتم در بازه [۲، ۰].

نتایج عددی به وسیله MVIM

اکنون، با توجه به تکرارهای مختلف VIM، می‌توان بهترین تکرار و زیر بازه اولیه مناسب را انتخاب کرد. این تکنیک گام به گام جدید می‌تواند منجر به جواب‌های بسیاربهتر و خطای بسیار کمتر شود. برای مثال ما تکرار چهارم با طول گام ۰/۵ را در هر زیربازه انتخاب می‌کنیم. بنابراین، معادلات شکار و شکارچی به همراه معادلات خطا در چهار گام به دست می‌آیند. نتیجه حاصل، جواب را بسیار مطلوب و با دقت بیشتر ارایه می‌دهد. به خصوص، دقت این تکنیک بسیار مناسب است.

گام اول: جواب شکار و شکارچی با تکرار چهارم VIM و خطای باقیمانده، با درنظرگرفتن این جواب در بازه $[۰,۰/۵]$، به شرح زیر به‌دست آمده است.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.113]

$$\begin{cases} n_{4,1}(t) = ۱۰ - ۹/۸۱۰۹t + ۳/۵۳۰۷t^{۳} - ۰/۸۵۱۲t^{۲} + ۰/۶۸۰۰t^{۷} - ۰/۳۵۰۳t^{۶} - ۱/۵۰۸۵\,t^{۵} + ۰/۷۱۴۷\,t^{۴} + ۰/۰۰۰۳t^{۱۵} \\ \qquad - ۰/۰۰۰۳t^{۱۴} - ۰/۰۰۵۴t^{۱۳} + ۰/۰۰۵۱t^{۱۲} + ۰/۰۳۹۱t^{۱۱} - ۰/۰۳۲۱t^{۱۰} - ۰/۱۸۶۰t^{۹} + ۰/۱۳۰۹t^{۸}. \\ n_{4,2}(t) = ۱۰ + ۱۰/۸۷۱۶t - ۳/۸۸۳۰t^{۳} + ۰/۸۱۱۵t^{۲} - ۰/۶۹۹۷t^{۷} + ۰/۳۵۹۲t^{۶} + ۱/۶۵۹۲t^{۵} - ۰/۷۴۶۹t^{۴} - ۰/۰۰۰۳t^{۱۵} \\ \qquad + ۰/۰۰۰۴t^{۱۴} + ۰/۰۰۵۵t^{۱۳} - ۰/۰۰۵۲t^{۱۲} - ۰/۰۳۹۱t^{۱۱} + ۰/۰۳۲۲t^{۱۰} + ۰/۱۸۶۰t^{۹} - ۰/۱۳۱۶t^{۸} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Rn_{4,1}(t) = ۰/۰۰۶۱t + ۰/۰۶۷۷t^{۱۵} + ۰/۱۱۲۱t^{۱۴} - ۰/۱۹۹۳t^{۱۳} - ۰/۲۸۹۳t^{۱۲} + ۰/۴۶۱۸t^{۱۱} + ۰/۵۵۳۹t^{۱۰} - ۰/۸۱۰۰t^{۹} \\ - ۰/۶۳۹۰t^{۸} - ۰/۰۰۰۱ + ۰/۹۵۹۴t^{۷} - ۰/۵۵۱۳t^{۶} - ۰/۷۷۷۰t^{۵} + ۰/۲۹۲۴t^{۴} + ۰/۰۰۰۱t^{۲۳} + ۰/۰۰۰۳t^{۲۲} - ۰/۰۰۰۹t^{۲۱} \\ - ۰/۰۰۱۸t^{۲۰} + ۰/۰۰۴۵t^{۱۹} + ۰/۰۰۸۲t^{۱۸} - ۰/۰۱۹۱t^{۱۷} - ۰/۰۳۳۰t^{۱۶} + ۱/۰۶۷۱\times۱۰^{-۸}t^{۳۰} - ۳/۰۷۰۲\times۱۰^{-۸}t^{۲۹} \\ - ۳/۳۵۶۳\times۱۰^{-۷}t^{۲۸} + ۹/۶۴۴۳\times۱۰^{-۷}t^{۲۷} + ۰/۰۰۰۰۴t^{۲۶} - ۰/۰۰۰۰۱t^{۲۵} - ۰/۰۰۰۰۴t^{۲۴} - ۰/۰۳۰۲۵t^{۲} - ۰/۱۰۹۸۲t^{۳}. \\ Rn_{4,2}(t) = ۰/۰۰۹۲t + ۰/۰۶۷۹t^{۱۵} + ۰/۱۱۲۱۶t^{۱۴} - ۰/۲۰۱۰t^{۱۳} - ۰/۲۹۴۳t^{۱۲} + ۰/۴۷۲۹t^{۱۱} + ۰/۵۸۸۲t^{۱۰} - ۰/۸۵۵۳t^{۹} \\ - ۰/۷۸۰۷t^{۸} + ۱/۰۸۴۴t^{۷} - ۰/۲۶۴۸t^{۶} - ۰/۹۶۲۴t^{۵} + ۰/۳۳۱۰t^{۴} + ۰/۰۰۰۱t^{۲۳} + ۰/۰۰۰۳t^{۲۲} - ۰/۰۰۰۹t^{۲۱} - ۰/۰۰۱۸t^{۲۰} \\ + ۰/۰۰۴۵t^{۱۹} + ۰/۰۰۸۲t^{۱۸} - ۰/۰۱۹۱t^{۱۷} - ۰/۰۳۲۹t^{۱۶} + ۱/۰۶۷۱۹\times۱۰^{-۸}t^{۳۰} - ۳/۰۷۰۲\times۱۰^{-۸}t^{۲۹} - ۳/۳۵۶۳\times۱۰^{-۷}t^{۲۸} \\ + ۹/۶۴۴۳\times۱۰^{-۷}t^{۲۷} + ۰/۰۰۰۰۴t^{۲۶} - ۰/۰۰۰۰۱t^{۲۵} - ۰/۰۰۰۰۴t^{۲۴} - ۰/۰۶۲۰t^{۲} + ۰/۰۲۱۵t^{۳} - ۰/۰۰۰۳. \end{cases}$$

جواب‌ها و معادلات خطا با در نظر گرفتن زیر بازه هر گام به‌دست می‌آید. سپس با جایگزینی جواب‌های موجود در سیستم مقادیر معادلات و خطاها در نقاط ویژه محاسبه می‌شود.

جدول ۱. مقایسه مقادیر جواب و خطای معادله شکار در چند نقطه با VIM و MVIM با طول گام ۰/۵

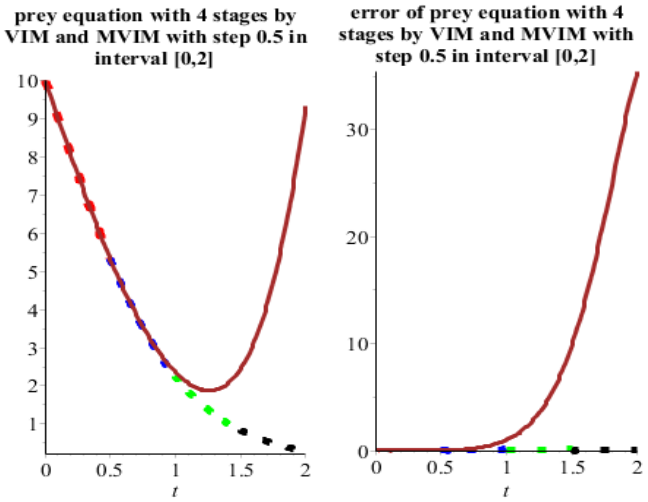
Prey T	VIM	|Eeq (VIM)|	MVIM	|Eeq (MVIM)|	| Eeq (VIM)- Eeq (MVIM)|
۰	۱۰	۰/۰۰۰۱	۱۰	۰/۰۰۰۱	۰
۰/۵	۵/۳۲۰۶	۰/۰۲۰۹	۵/۳۲۰۶	۰/۰۲۹۰	۱/۱ E- ۱۶
۱	۲/ ۳۵۶۰	۰/۹۹۴۴	۲/۲۴۴۸۶	۰/۱۵۳۳	۰/۸۴۱۰
۱/۵	۲/۴۴۶۷	۹/۹۴۲۳	۰/۸۳۹۰	۰/۱۶۷۲	۹/۷۷۵۱
۲	۹/۳۳۲۱	۳۵/۵۰۵۷	۰/۲۹۹۸	۰/۰۸۷۶	۳۵/۴۱۸۲

جدول ۱ و شکل ۸ دقت MVIM به ویژه با انتخاب تکرار مناسب VIM و گام اولیه مناسب توسط MVIM در جواب به‌دست آمده را برای گونه شکار نشان می‌دهد. تفاوت حداکثر خطای معادلات با درنظرگرفتن جواب به‌دست آمده از چهارمین تکرار VIM و MVIM با طول گام ۰/۵، حدود ۳۵ واحد است. جواب دستگاه با چهار تکرار VIM دارای حداکثر خطا برابر ۳۵/۵۰۵۷ برای معادله تقریبی شکار در فاصله $[۰, ۲]$ می‌باشد. اما با MVIM و طول گام ۰/۵، حداکثر خطا تقریباً برابر ۰/۱۶ در بازه $[۰, ۲]$ است. منحنی‌های جواب معادله شکار و

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.113]

خطا با جایگزینی جواب به‌دست آمده در معادله حاکم (باقی‌مانده یا خطای معادله) به ترتیب در شکل ۸ نشان داده شده است.



شکل ۸. منحنی جواب و خطای تقریبی معادله شکار به‌دست آمده توسط VIM (خط پیوسته) و MVIM (خط نقطه) برای تکرارچهارم و طول گام ۰.۵ در فاصله [۲، ۰].

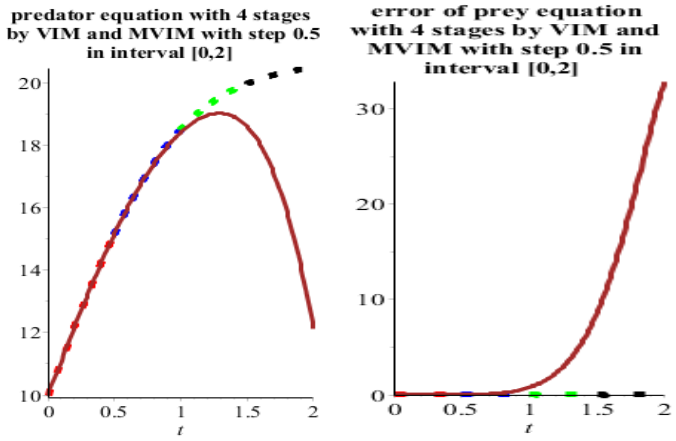
جدول ۲. مقایسه مقادیر جواب و خطای معادله شکارچی در چند نقطه با VIM و MVIM با طول گام ۰/۵.

Predator t	VIM	$\|Eeq_{(VIM)}\|$	MVIM	$\|Eeq_{(MVIM)}\|$	$\|Eeq_{(VIM)}- Eeq_{(MVIM)}\|$
۰	۱۰	۰/۰۰۰۳	۱۰	۰/۰۰۰۳	۰
۰/۵	۱۵/۱۵۵۸	۰/۰ ۱۷۵	۱۵/۱۵۸۵	۰/۰ ۱۷۵	۵/۳ E-۱۵
۱	۱۸/۴۱۹۸	۰/۷۷۴۹	۱۸/۵۰ ۵۶	۰/۱۰ ۲۱	۰/۶۷۲۸
۱/ ۵	۱۸/۶۰ ۱۲	۸/۶۵۹۵	۱۹/۹۸۱۰	۰/۱۱۶۸	۸/۵۴۲۷
۲	۱۲/۱۱۲۷	۳۲/۹۱۵۱	۲۰/۴۸۳۳	۰/۰۶۲۲	۳۲/۸۵۲۹

جدول ۲ و شکل‌های ۹ نشان می‌دهد که جواب به‌دست آمده برای گونه شکارچی توسط MVIM و انتخاب گام اولیه و تکرار مناسب VIM بسیار دقیق‌تر از جواب VIM است. حداکثر خطا برای جواب سیستم با چهار تکرار VIM برابر ۳۲/۹۱۵۱ برای معادله تقریبی شکارچی در فاصله [۲ ,۰] می‌باشد. اما ، با MVIM و طول گام ۰/۵، حداکثر خطا تقریباً به ۰/۱۲در بازه زمانی [۲، ۰] کاهش می‌یابد. منحنی‌های جواب معادله شکارچی و خطا با جایگزینی جواب به‌دست آمده در معادله (باقی‌مانده یا خطای معادله) به ترتیب در شکل ۹ نشان داده شده است.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.113]



شکل ۹. منحنی جواب و خطای تقریبی معادله شکارچی به‌دست آمده توسط VIM (خط پیوسته) و MVIM (خط نقطه) برای تکرار چهارم و طول گام ۰/۵در فاصله [۲، ۰].

این تکنیک با استفاده از تکرار چهارم VIM و طول گام ۰/۲۵ نیز اعمال شده است. جواب به دست آمده توسط MVIM و طول گام ۰/۲۵بسیار دقیق تر از جواب به‌دست آمده توسط VIM و حتی جواب به‌دست آمده توسط MVIM با طول گام ۰/۵است. همچنین، مقادیر تقریبی به‌دست آمده توسط MVIM در بازه مورد نظر و در نقاط تعیین‌شده دقیق‌تر از جواب VIM بدون تقسیم بازه به زیر بازه‌ها بوده است. نتایج اعمال روش چند گامی با طول گام ۰/۲۵، در جداول ۳ و ۴ ارایه شده است.

جدول ۳. مقایسه مقادیر جواب و خطای معادله شکار در چند نقطه با VIM و MVIM با طول گام ۰/۲۵

Prey T	VIM	$\|Eeq_{(VIM)}\|$	MVIM	$\|Eeq_{(MVIM)}\|$	$\|Eeq_{(VIM)}- Eeq_{(MVIM)}\|$
۰	۱۰	۰/۰۰۰۱	۱۰	۰/۰۰۰۱	۰
۰/۲۵	۷/۵۵۰۵	۰/۰۰۱۹	۷/۵۵۰۵	۰/۰۰۲۰	۳E-۱۶
۰/۵	۵/۳۲۰۶	۰/۰۲۹۰	۵/۳۱۸۴	۰/۰۰۴۹	۰/۰۲۴۰۴
۰/۷۵	۳/۵۴۸۲	۰/۲۰۶۴	۳/۵۲۶۴	۰/۰۰۸۶	۰/۱۹۷۸
۱	۲/۳۵۶۰	۰/۹۹۴۴	۲/۲۳۱۹	۰/۰۱۰۵	۰/۹۸۳۹
۱/۲۵	۱/۸۷۶۱	۳/۵۵۵۹	۱/۳۶۷۶	۰/۰۰۹۹	۳/۵۴۶۰
۱/۵	۲/۴۴۶۷	۹/۹۴۲۳	۰/۸۲۰۸	۰/۰۰۷۶	۹/۹۳۴۷
۱/۷۵	۷/۷۲۲۴	۲۱/۹۲۸۳	۰/۴۸۶۵	۰/۰۰۵۳	۲۱/۹۲۳۱
۲	۹/۳۳۲۱	۳۵/۵۰۵۷	۰/۲۸۶۳	۰/۰۰۳۴	۳۵/۵۰۲۳

جدول ٤. مقایسه مقادیر جواب و خطای معادله شکارچی در چند نقطه با VIM و MVIM با طول گام ۰/۲۵

Predator t	VIM	$\|Eeq_{(VIM)}\|$	MVIM	$\|Eeq_{(MVIM)}\|$	$\|Eeq_{(VIM)}- Eeq_{(MVIM)}\|$
۰	۱۰	۰/۰۰۰۳	۱۰	۰/۰۰۰۳	۰
۰/۲۵	۱۲/۷۰۶۷	۰/۰۰۱۲	۱۲/۷۰۶۷	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۰۸
۰/۵	۱۵/۱۵۸۵	۰/۰۱۷۵	۱۵/۱۵۹۹	۰/۰۰۲۱	۰/۰۲۶۷۶
۰/۷۵	۱۷/۱۰۰۹	۰/۱۴۶۱	۱۷/۱۱۵۸	۰/۰۰۳۹	۰/۲۰۲۴

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.113]

۱	۱۸/۴۱۹۹	۰/۷۷۴۹	۱۸/۵۱۳۳	۰/۰۰۵۱	۰/۹۸۹۳
۱/۲۵	۱۹/۰۱۷۹	۲/۹۵۵۳	۱۹/۴۲۸۶	۰/۰۰۴۹	۳/۵۵۱۰
۱/۵	۱۸/۶۰۱۲	۸/۶۵۹۵	۱۹/۹۸۸۵	۰/۰۰۳۹	۹/۹۳۸۴
۱/۷۵	۱۶/۵۳۲۱	۱۹/۷۷۱۰	۲۰/۳۱۰۵	۰/۰۰۲۷	۲۱/۹۲۵۵
۲	۱۲/۱۱۲۷	۳۲/۹۱۵۱	۲۰/۴۸۲۰	۰/۰۰۱۸	۳۵/۵۰۴۰

بر اساس نتایج به‌دست آمده در جداول ۳ و ۴ ، جواب سیستم در تکرار چهارم و طول گام ۰/۲۵بهتر از جواب حاصل از تکرار چهارم تک گامی است. بنابراین انتخاب یک تکرار مناسب و طول گام متناسب می‌تواند جواب بهتری را نتیجه دهد.

بر اساس جداول مذکور، حداکثر خطای معادله شکار با جایگزینی جواب حاصل از MVIM و طول گام ۰/۲۵حدود ۰/۰۱است در حالی که حداکثر خطای VIM حدود ۳۵/۵می باشد. همچنین، حداکثر خطای معادله شکارچی با استفاده از جواب به‌دست آمده از MVIM و طول گام ۰/۲۵حدود ۰/۰۰۵، ولی حداکثر خطای VIM، حدود ۳۳ است.

٤ جمع‌بندی و بحث

در این مقاله ابتدا معادلات شکار و شکارچی به کمک روشVIM تا تکرار هفتم به‌دست آمد. خطای جواب به دست آمده در بازه $[۲ ,_{۰}]$ نشان داد که برای دستیابی به مینیمم خطا انتخاب تکرار چهارم با طول گام کوچک‌تر یا مساوی با ۰/۵ مناسب است. اگر چه هر چقدر طول گام کوچک‌تر باشد انتظار می رود نتایج بهتری حاصل گردد؛ اما جهت اجتناب از افزایش محاسبات مساله با طول گام‌های ۰/۵ و ۰/۲۵ حل شد. در این مقاله به طول برای سیستم مذکور و شرایط اولیه داده شده، حداکثر خطای معادله شکار از طریق VIM برابر ۳۵/۵۰۵۷و با استفاده از MVIM به کار رفته، برای طول گام های ۰/۵و ۰/۲۵به ترتیب برابر ۰/۱۶۷۲و ۰/۰۰۹۹محاسبه گردید. همچنین، حداکثر خطا برای معادله شکارچی از ۳۲/۹۱۵۱برای VIM به ترتیب به ۰/۱۱۶۹و ۰/۰۰۵۱ برای MVIMجدید و با طول گام ۰/۵و ۰/۲۵کاهش می‌یابند. این نتایج افزایش بسیار زیاد دقت جواب در روش MVIM را در مقایسه با روش VIM نشان می‌دهد.

٥ نتیجه‌گیری

اگرچه روش تکرار وردشی برای مسایل مختلف قابل استفاده است، اما در مقاله حاضر نشان داده شده است که خطای جوابی که با این روش در یک سیستم شناخته شده به‌دست می‌آید، قابل توجه است. دستگاه دوگونه همزیست بر هم اثرگذار در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است. جواب‌های تقریبی چندین تکرار توسط VIM به‌دست آمده و معادلات خطای آن‌ها نیز ارایه شده است. سپس یک تکرار مناسب از VIM با خطای کمتر در زیر بازه اول، انتخاب گردید. بر اساس این جواب و طول گام مناسب، از MVIM استفاده شد. با اعمال مقدار جواب در انتهای هر گام به عنوان شرایط اولیه گام بعدی، نخست جواب تمام گام‌ها در اولین زیر بازه به‌دست آمده، نهایتاً به زیر بازه اصلی منتقل شده‌اند. نشان داده شد که اختلاف زیادی بین جواب به‌دست آمده از

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.113]

VIM و MVIM جدید وجود دارد. مقادیر جواب، خطای حاصل از جایگزینی آن‌ها در سیستم معادلات و نیز اختلاف آن‌ها در چندین نقطه معین در شکل‌ها و جداول نشان داده شده‌اند. با توجه به اینکه زیر بازه بزرگ‌تر دارای نقاطی با فاصله بیشتر از نقطه اولیه و در نتیجه باعث ایجاد خطای بیشتر می‌گردند، لذا خطای جواب به‌دست آمده با کاهش طول گام بهبود یافته است.

منابع

[1] He J. H., (2000). A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems, Int. J. Non- Linear Mech., 35, 37–43.

[2] He J. H., (2005) Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations, Chaos, Solitons and Fractals, 26, 695–700.

[3] He J. H., (2003). Homotopy perturbation method: A new nonlinear analytical technique, Appl. Math. Comput., 135, 73–79.

[4] G.A. Adomian, (1998). Review of the decomposition method in applied mathematics, J. Math. Anal. Appl., 135, 501–544.

[5] Cherruault Y., (1989). Convergence of Adomian's method, Kybernets, 18, 31–38.

[6] Biazar J., Montazeri R., (2005). A computational method for solution of the prey and predator problem, Applied Mathematics and Computation, 163, 841–847.

[7] He J. H., (1997). A new approach to nonlinear partial differential equations, Commun. Non-Linear Sci. Numer. Simul., 2 (4), 230–235.

[8] He J. H., (1998). Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media, comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 167, 27–68.

[9] He J. H., (1998). Approximate solution of nonlinear differential equations with convolution product nonlinearities, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 167, 69–73.

[10] He J. H., (1999). Variational iteration method kind of non-linear analytical technique: Some examples, Int. J. Non-Linear Mech., 34, 699–708.

[11] He J. H., (2000). Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems, Appl. Math. Comput., 114 (23), 115–123.

[12 He J. H., (1997). Variational iteration method for delay differential equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2 (4), 235–236.

[13] Darvishi M. T., Khani F., Soliman A. A., (2007). The numerical simulation for stiff systems of ordinary differential equations, Comput. Math. Appl., 54.

[14] Liao S., Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method, ISBN 1 - 58458 – 407 – X.

[15] Marinca V., Herisanu N., (2015). The Optimal Homotopy Asymptotic Method, Springer, (2015).

[16] He J. H., (2006) Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations, International journal of Modern physics B, 20 (10), 1141-1199.

[17] He J. H., (2006). Non-perturbative Methods for Strongly Nonlinear Problems, Dissertation, de-Verlag in Internet GmbH, Berlin, (2006).

[18] He J. H., (2003). Variational approach to the sixth-order boundary value problems, Appl. Math. Comput., 143 (2_3), 537_538.

[19] Inokuti M., (1978). General use of the Lagrange multiplier in non-linear mathematical physics, in: S. Nemat-Nasser (Ed.), Variational Method in the Mechanics of Solids, pergamon press, Oxford, pp. 156-162.

[20] Finlayson B. A., (1972). The Method of weighted Residuals and Variational Principles, Academic press, New York.

[21] saeidi M., ilie M., khoshkena A., (1386). Calculation approximate and non-numerical solutions for the predator-prey Lotka–Volterra equation and its comparison with numerical solutions, Journal of Operational Research and Its Applications, 12 (4), 47-35.

[22] Lotfi T., Babolian E., Yaghoubi F., (1388). Calculation of beta function by Adomian decomposition and homotopy perturbation methods and their comparison, Journal of Operational Research and Its Applications, 6(20), 9-20.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.113]

[23] Heydari M. H., Bavi O., (2021). An optimal variational iteration method for investigating the physical behavior of quasi-steady squeezing flow confined between parallel rigid walls, Physica Scripta, 96 (11), 114012.
[24] Harir A., Melliani S., El Harfi H., Saadia Chadli L., (2020). Variational Iteration Method and Differential Transformation Method for Solving the SEIR Epidemic Model, International Journal of Differential Equations, 1, 1-7.
[25] Zaid M. Odibat, (2010). A study on the convergence of variational iteration method, Mathematical and Computer Modelling, 51, 1181–1192.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.52547/jamlu.19.4.113]