

# Queuing Systems with Discrete Time Series Input and Application in Asynchronous Transmission Networks

M. Shams<sup>1\*</sup>, H. Ghafoori<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Assistant Professor, Department of Statistics, University of Kashan, Kashan, Iran

<sup>2</sup> Master's degree in Mathematical Statistics, Department of Statistics, University of Yazd, Yazd, Iran

## Research Paper

**Received:** 30 March 2025

**Accepted:** 5 September 2025

**Abstract:** Discrete time series models are often used to count events at discrete times. In this paper, the stationary distribution of system size and the waiting time distribution of queuing systems whose input is a time series are calculated. In finding the steady state probabilities of queuing systems, it is recommended to use matrix analysis methods that replace the generating function and Laplace transform methods. Using this tool, hard numerical calculations are made easier and are used in practical applications. Also, the applications of these models in telecommunications and communications, especially asynchronous transmission networks, are analyzed.

**Introduction:** One of the popular statistical models that is useful for modeling dependent data is time series models. Time series models with integer or integer values in counting data measured in time sequence are used in numerous applications and some titles count events, objects, or people occurring at successive intervals or at successive points in time.

**Materials and Methods:** One of the important criteria in queuing models is the system size and waiting time distribution. When the system reaches a steady state, the stationary distribution can describe the model well. In this paper, the stationary distribution of system size and waiting time distribution of queuing systems whose input is a time series are calculated.

**Results and Discussion:** In finding the steady state probabilities of queuing systems, it is recommended to use matrix analysis methods that replace the generating function and Laplace transform methods. Using this tool, hard numerical calculations are made easier and are used in practical applications.

**Conclusions:** The applications of the discrete-time multi-service queuing system with autoregressive inputs introduced in this paper are discussed in telecommunications and communications, especially asynchronous transmission networks, which were investigated in this paper. Researchers can find other applications of the model presented in the paper.

**Keywords:** Time Series Models, Queuing Systems, Markov Renewal Process, Asynchronous Transmission Networks.

---

\* Corresponding Author: mehdishams@kashanu.ac.ir

## سیستم‌های صف‌بندی با ورودی اتورگرسیو گسسته و کاربرد در شبکه‌های انتقال ناهم‌زمان

مهدی شمس<sup>۱\*</sup>، هانیه غفوری<sup>۲</sup>

۱- استادیار، گروه آمار، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

۲- فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد رشته آمار ریاضی، گروه آمار، دانشگاه یزد، یزد، ایران

رسید مقاله: ۱۰ فروردین ۱۴۰۴

پذیرش مقاله: ۱۴ شهریور ۱۴۰۴

### چکیده

مدل‌های سری زمانی گسسته اغلب برای شمارش حوادث در زمان‌های گسسته مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این مقاله توزیع مانای اندازه‌ی سیستم و توزیع زمان انتظار سیستم‌های صف که ورودی آن یک سری زمانی است محاسبه می‌شوند. در پیدا کردن احتمال‌های وضعیت پایای سیستم صف‌بندی، استفاده از روش‌های تحلیل ماتریسی که جایگزین روش‌های تابع مولد و تبدیل لاپلاس هستند توصیه می‌شود. با استفاده از این ابزار، محاسبات سخت عددی، آسان‌تر شده و مورد استفاده در کاربردهای عملی قرار می‌گیرد. همچنین کاربردهای این مدل‌ها در در مخابرات و ارتباطات به‌ویژه شبکه‌های انتقال ناهم‌زمان تحلیل می‌شوند.

**کلمات کلیدی:** مدل‌های سری زمانی، سیستم‌های صف‌بندی، فرایند تجدید مارکف، شبکه‌های انتقال ناهم‌زمان.

### ۱ مقدمه

مدل‌های سری‌های زمانی با مقدارهای صحیح یا گسسته در داده‌های شمارشی اندازه‌گیری شده بر حسب توالی زمانی در عمل کاربردهای فراوان دارند و اغلب به عنوان شمارش حوادث، اشیاء یا افراد در فاصله‌های متوالی یا در نقطه‌های متوالی در زمان اتفاق می‌افتند. در برخی مدل‌های صف‌بندی، ورودی‌ها را می‌توان به عنوان مدل‌های سری زمانی گسسته در نظر گرفت. صف‌های چندسرویس‌دهی اغلب در سیستم‌های مخابراتی خصوصاً در طراحی شبکه‌ها به روش شبکه‌های انتقال ناهم‌زمان، یعنی ATM مورد استفاده قرار می‌گیرد. این صف‌ها به‌طور مستقیم در سیستم‌های حمل و نقل هوشمند، مراکزهای تماس، شبکه، مخابرات، صف سرور، ابررایانه‌های پایانه‌های مخابراتی، سیستم‌های مخابرات پیشرفته و ترافیک قابل اجرا هستند.

\* عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: mehdishams@kashanu.ac.ir

شبکه‌ی ATM یک پروتکل سویچینگ بسته‌ای است که داده‌ها را در سلول‌هایی با اندازه‌ی کوچک ثابت رمزگذاری می‌کند و هدف این تکنولوژی طراحی راهبرد شبکه‌ها است که می‌تواند زمان واقعی صدا و تصویر در همایش‌ها را به خوبی فایل‌های عکس و متن و ایمیل انتقال دهد. فرایندهای ورودی مارکف (MAP)<sup>۱</sup> از توزیع نمایی (مثل فرایند پواسون مارکف تعدیل‌یافته (MMPPs)<sup>۲</sup>) ساخته شده‌اند که در قضیه‌ی ترافیک از راه دور کلاسیک که ترافیک خودهمبستگی بالایی را نشان می‌دهد، مورد استفاده قرار می‌گیرند. با توجه به ویژگی فقدان حافظه‌ی توزیع نمایی، تجزیه و تحلیل مدل‌های ترافیک از راه دور معمولاً قابل انجام هستند. هم‌چنین شناسایی و برآورد مدل یک امر اساسی برای این مدل‌ها است. معمولاً به منظور کاهش تعداد پارامترها، دو حالت MMPPs یا فرایند برنولی مارکف تعدیل‌یافته (MMBPs)<sup>۳</sup> استفاده می‌شوند، زیرا این توزیع‌ها فقط ۴ پارامتر یا کمتر برای برآورد شدن دارند و خودهمبستگی‌های آن‌ها نمایی یا هندسی بریده شده هستند که یکی از ویژگی‌های برجسته‌ی ترافیکی در شبکه‌های مخابراتی مانند ATM<sup>۴</sup> است.

مدل‌های سری زمانی با تعداد نسبتاً کمتری از پارامترها برای مدل‌سازی دقیق و معنی‌داری از منابع ترافیکی مختلف در برنامه‌های کاربردی با سرعت بالا مناسب هستند. از میان سری‌های زمانی،  $DAR(1)$ <sup>۵</sup> یک فرایند مارکف با تابع خودهمبستگی به‌طور هندسی بریده شده است که می‌تواند هر توزیع کلی را نمایش دهد. گذشته از این  $M/M/\infty$  بسیار ساده‌تر از فرایند ورودی مارکف دسته‌ای (BMAP)<sup>۶</sup> است که هم‌چنین می‌تواند با هر توزیع کلی تطبیق داده شود. بنابراین  $DAR(1)$  می‌تواند به عنوان یک داوطلب خوب در مدل ترافیک ورودی در شبکه‌های مخابرات مانند شبکه‌ی ATM مورد بررسی قرار گیرد.

معمولاً روش‌های تابع مولد و تبدیل لاپلاس در پیدا کردن احتمال‌های وضعیت پایای سیستم‌های صف‌بندی مانند  $M/M/1$ ،  $M/M/\infty$  و  $G/G/1$  و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرند. اما راحتی سر و کار داشتن با این سیستم‌های صف‌بندی از طریق این روش‌ها، از لحاظ عددی وقتی که توزیع زمان بین دو ورود یا سرویس نمایی نیست پیچیده می‌شوند. روش‌های تحلیل ماتریسی [۱] در حل مسائل صف، باعث می‌شود که محاسبات سخت عددی کاهش یافته و به کارگیری مدل‌های صف برای تحلیل موقعیت‌های کاربردی، با اختیار کردن توزیع زمان بین دو ورود و سرویس غیر نمایی، که در کاربردهای عملی مناسب‌تر هستند افزایش یابند.

سیستم‌هایی با مدل زنجیرهای مارکف  $G/M/1$  و  $M/G/1$ ، در سیستم‌های ارتباطی مدل‌سازی پیشرفته گسترش پیدا می‌کند. هر کدام از این صف‌ها ویژگی‌هایی را نشان می‌دهند که نیاز به یک حل ماتریسی دارد. صف  $G/M/1$  یک ویژگی هندسی را که توانایی استفاده از روش‌های ماتریسی را دارد نشان می‌دهد، در حالی که تحلیل ماتریسی سیستم‌های  $M/G/1$  دشوارتر هستند.

<sup>1</sup> Markovian Arrival Processes<sup>2</sup> Markov Modulated Poisson Process<sup>3</sup> Markov Modulated Bernoulli Process<sup>4</sup> Asynchronous Transfer Mode<sup>5</sup> Discrete AutoRegressive process of the order  $p$ <sup>6</sup> Batch Markovian Arrival Process

در [۲، ۳] یک روش ساده برای یافتن دنباله‌ی مانا از متغیرهای تصادفی وابسته با یک توزیع حاشیه‌ای مشخص معرفی شده است. سری‌های زمانی گسسته از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند که به عنوان نمونه می‌توان به مراجع [۴-۶] اشاره کرد. مدل  $DAR(1)$  (فرایند اتورگرسیو گسسته از مرتبه ۱) در [۷] مورد بررسی قرار گرفته است. در [۸] چگونگی بهبود عملکرد شبکه‌های مخابراتی تحت محدودیت پایداری مورد تحلیل قرار می‌گیرد. سیستم‌های صف در مخابرات و ارتباطات کاربرد فراوان دارند که مطالعه مرجع [۹] برای این منظور می‌تواند مفید باشد. فرایند  $DAR(1)$  به یک مدل خوب برای ترافیک همایش از راه دور کدگذاری شده‌ی نرخ بیت متغیر (VBR)<sup>۱</sup>، شناخته شده است [۱۰، ۱۱]. توزیع زمان انتظار از صف تک‌سرویس‌دهی زمان پیوسته با ورودی  $DAR(1)$  و همچنین جمله با فرم بسته برای تابع مولد احتمال مانای اندازه‌ی سیستم از صف تک‌سرویس‌دهی زمان پیوسته با ورودی  $DAR(1)$ ، در [۱۲، ۱۳] مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. در [۱۴]، میانگین اندازه‌ی صف در یک صف با ورودی‌های  $DAR(p)$  بررسی شده است. تقریب‌های تحلیلی از صف‌ها با زمان‌های سرویس اتورگرسیو با همبستگی کم و زیاد، در [۱۵] مورد بحث قرار گرفته است. ماتریس احتمال انتقال یک مرحله‌ای از این فرایند مارکف از نوع  $M/G/1$  در [۱] ارایه شده است. در [۱۶]، سیستم‌های صف‌بندی با توزیع گسسته میتاگ-لفلر بررسی شدند.

در این مقاله سیستم‌های صف چندسرویس‌دهی زمان گسسته‌ی مختلف با ورودی  $DAR(1)$ ، که با توزیع حاشیه‌ای شبه‌دوجمله‌ای منفی نوع دو داده شده مطالعه می‌شوند. توزیع دوجمله‌ای منفی، توزیع پواسون تعمیم‌یافته، توزیع بول-تنر و توزیع پواسون تعمیم‌یافته‌ی بریده‌شده در صفر به عنوان حالت‌های خاص توزیع شبه‌دوجمله‌ای منفی نوع دو بررسی می‌شوند. همچنین با کمک روش‌های تحلیل ماتریسی و قضیه‌ی احیاکننده‌ی نوپیدایشی مارکف، توزیع مانای اندازه‌ی سیستم و توزیع زمان انتظار بسته‌ی دلخواه محاسبه می‌شود.

## ۲ پیش‌نیازها

در سیستم‌های صف گسسته که در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرند، زمان یک عدد صحیح نظر گرفته می‌شود و از این‌رو زمان را به شکاف‌هایی با اندازه‌ی مساوی تقسیم کرده و یک شکاف برای به کارگیری یک بسته توسط سرویس‌دهنده مورد نیاز است. فرض می‌کنیم که ورود بسته در ابتدا و انتهای شکاف رخ می‌دهد. اگر  $X(t)$  تعداد بسته‌های ورودی در شروع  $t$ -امین شکاف را نشان دهد، فرایند تصادفی  $\{X(t): t=0,1,\dots\}$  نشان‌دهنده‌ی بسته‌های ورودی است. فرایند تصادفی  $\{N(t): t=0,1,\dots\}$  یا اندازه‌ی سیستم، تعداد بسته‌های درون سیستم را نشان می‌دهد که بلافاصله قبل از ورود در شروع  $t$ -امین شکاف رخ می‌دهند. برای این سیستم‌های صف‌بندی، توزیع مانای اندازه‌ی سیستم و توزیع زمان انتظار بسته‌ی دلخواه با کمک روش‌های تحلیل ماتریسی و قضیه‌ی احیاکننده‌ی نوپیدایشی مارکف حاصل می‌شود. در احتمال کاربردی، یک فرآیند نوپیدایشی، دسته‌ای از فرآیندهای تصادفی با این ویژگی است که بخش‌های خاصی از فرآیند را می‌توان از نظر آماری

<sup>۱</sup> Variable Bit Rate

مستقل از یکدیگر در نظر گرفت [۱۷]. در حقیقت در یک فرآیند نوپیدایشی، نقطه‌های زمانی وجود دارند که از دیدگاه احتمال‌هایی، فرآیند خود را مجدداً آغاز می‌کند.

صف‌هایی با ورودی‌های منفی به عنوان یک سازوکار کنترل در بسیاری از شبکه‌های کامپیوتری و مخابراتی، شبکه‌های عصبی، سیستم‌های صنعتی و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرند. در [۱۸] از الگوریتم شبکه‌های عصبی و شبکه ژنتیک در جهت پیش‌بینی قیمت و روند تغییر قیمت سهام برای انتخاب سبد بهینه استفاده شده است. سرویس‌گیرنده‌های منفی می‌توانند در یک شبکه‌ی کامپیوتری یا پایگاه داده، ویروس یا فرمان‌های حذف بعضی از تغییرات آدرس و در یک سیستم صنعتی، فرمان‌های تقاضا را نشان دهند و در شبکه‌های عصبی، سرویس‌گیرنده‌ی مثبت به عنوان یک برآشتگی و سرویس‌گیرنده‌ی منفی به عنوان یک بازدارنده وارد عمل می‌شود. یک ورودی منفی سرویسی دریافت نمی‌کند و اثر حذف یک سرویس‌گیرنده از صف را دارد. اگر سرویس‌گیرنده زمانی که صفی تشکیل نشده وارد سیستم شود، تاثیری در سیستم نمی‌گذارد و از دست رفته محسوب می‌شود. برای یک عدد ثابت  $k$ ، وقتی که یک ورودی منفی با اندازه‌ی  $L(<k)$   $[L(\geq k)]$  وارد سیستم می‌شود، کم‌ترین مقدار  $(L; N(t))$   $(K; N(t))$  سرویس‌گیرنده‌ها در صف را حذف می‌کند.

سیستم صف‌بندی، یک سامانه شامل تعدادی سرویس‌دهنده و سرویس‌گیرنده‌هایی هست که تا سرویس‌شان کامل نشود، از سیستم خارج نمی‌شوند. متغیرهای تصادفی  $T_n$  و  $S_n$  را با مقدارهای حقیقی مثبت گویند، هرگاه به ازای  $n \in \mathbb{N}$  و  $T_{n+1} > T_n$  و  $S_{n+1} > S_n$ . دنباله‌ی  $T = \{T_n : n \in \mathbb{N} \cup \{\cdot\}\}$  را فرایند نقطه‌ای ورودی و  $S = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$  را دنباله‌ای از زمان‌های سرویس در نظر می‌گیریم. فرض کنید  $k$  تعداد باجه-های سرویس‌دهنده و  $C$  ظرفیت سیستم باشد که  $C \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ،  $k, c \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . نظم سرویس  $B$ ، الگوی سرویس است که می‌تواند FCFC<sup>۱</sup> (کسی که اول آمده اول سرویس می‌گیرد)، LCFC<sup>۲</sup> (آخرین نفر اول سرویس می‌گیرد) یا PS<sup>۳</sup> (روش اولویت) باشد که به‌طور معمول در این مقاله نظم سرویس FCFC را برمی‌گزینیم. طبق نماد کنادال [۱۹]، سیستم صف  $T/S/k/c/B$  شامل فرایند نقطه‌ای ورودی  $T$ ، دنباله‌ای از زمان‌های سرویس  $S$ ، تعداد سرویس‌دهندگان  $k$ ، ظرفیت سیستم  $C$  و نظم سرویس  $B$  است. اگر  $C = \infty$  و  $B = FCFS$ ، آن‌گاه نماد کنادال [۱۹] به‌صورت ساده‌تر یعنی  $T/S/k$  نشان داده می‌شود.

فرایند تصادفی  $\{Z_n : n \geq 2\}$  را  $n$ -امین زمان بین دو ورود گویند که به‌صورت  $Z_n = T_n - T_{n-1}$  تعریف می‌شود.

<sup>1</sup> First Come First Served

<sup>2</sup> Last Come First Served

<sup>3</sup> Processor Sharing

فرایند تصادفی  $\{Z(t): t=0,1,\dots\}$  را در نظر بگیرید، در این صورت دنباله‌ی متغیرهای تصادفی دو متغیره‌ی  $\{Y_n, S_n, n=0,1,2,\dots\}$  را دنباله‌ی تجدید مارکف گویند، اگر،  $S_0=0$ ،  $S_{n+1} \geq S_n$  و  $Y_n=0,1,2,\dots$

(۱)

$$\begin{aligned} P(Y_{n+1}=j, S_{n+1}-S_n \leq x | Y_n=i, S_n, Y_{n-1}, S_{n-1}, \dots, Y_0, S_0) \\ = P(Y_{n+1}=j, S_{n+1}-S_n \leq x | Y_n=i) \\ = P(Y_1=j, S_1 \leq x | Y_0=i). \end{aligned}$$

فرآیندهای تجدید مارکف، یک فرآیندهای تصادفی است که رده فرآیندهای جهشی مارکف را تعمیم می‌دهند و زنجیرهای مارکف و فرآیندهای پواسون حالت‌های خاصی از آنها هستند.

ماتریس  $G(x) = [G_{ij}(x)]$  را که احتمال شرطی آن توسط رابطه‌ی (۱) داده شده است، هسته‌ی دنباله‌ی تجدید مارکف نامند. فرض کنید  $N(t) = \sup\{n=0,1,\dots: S_n \leq t\}$  تعداد مشاهدات فرایند  $Z(t)$  تا زمان  $t$  باشد. همچنین به ازای هر  $j \in \mathbb{Z}$ ، قرار دهید

$$Z_j(n) = \begin{cases} 1 & Y_n = j \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

در این صورت  $N_j(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Z_j(n)$  تعداد مشاهدات زمانی  $j$  تا رسیدن به زمان  $t$  است. فرایند  $N(t) = N_j(t)$ ،  $j \in I$  را فرایند تجدید مارکف و هسته‌ی  $G(x)$  را هسته‌ی فرایندهای تجدید مارکف گویند. در یک فرآیند مارکف نشانیده، فقط حالت سیستم را در نقطه‌های زمانی نشانه‌گذاری شده خاصی، مانند زمان ورود یا خروج در یک سیستم صف، مشاهده می‌کنیم. این نقطه‌های نشانه‌گذاری شده، یک زنجیر مارکف را تعریف می‌کنند. زمان بین این نقطه‌ها، یک متغیر تصادفی است و فرآیندی که این زمان‌ها را توصیف می‌کند، یک فرآیند نیم‌مارکف است. قابل ذکر است که در فرآیند نیم‌مارکف، زمان تا انتقال حالت بعدی می‌تواند هم به حالت فعلی و هم به حالت بعدی بستگی داشته باشد. فرایندهایی با دنباله‌های تجدید مارکف نشانیده را فرایندهای احیاکننده‌ی نوپیدایشی مارکف گویند. فرایند تصادفی  $\{Z(t): t=0,1,\dots\}$  را یک فرایند احیاکننده‌ی نوپیدایشی مارکف نامند، اگر دنباله‌ی تجدید مارکف

$$\{Y_n, S_n: n=0,1,\dots\}$$

از متغیرهای تصادفی، که تمام توزیع‌های شرطی متناهی‌البعد  $\{Z(t+S_n), t=0,1,\dots\}$  به شرط  $\{Z(u): 0 \leq u \leq S_n, Y_n=i\}$  را همانند توزیع‌های  $\{Z(t): t=0,1,\dots\}$  به شرط  $Y_0=i$  تشکیل دهند، وجود داشته باشند.

### ۳ روش تحلیل ماتریسی

روش‌های تحلیل ماتریسی [۲۰] یک تفسیر احتمالی از ماتریس‌های انتقال فرایندها ارائه می‌دهد. هم‌چنین مطالعه‌ی زنجیرهای مارکف نشانیده، تحلیل‌های فرایندهای تصادفی را توسط بکارگیری این روش‌ها ساده می‌کند. در [۱] دو راه حل ماتریسی معرفی می‌شود و اغلب، مدل‌های صف‌بندی  $M/G/1$  و  $G/M/1$  بررسی می‌شوند که از آن‌ها تحت عنوان فرایندهای شبه زاد و مرگ یاد می‌شود. در مدل‌های صف‌بندی، فرآیند شبه زاد و مرگ، تعمیمی از فرآیند زاد و مرگ است که به صورت یک در میان بین سطح‌های بالا و پایین می‌رود، اما زمان بین این انتقال‌ها می‌تواند توزیع پیچیده‌تری داشته باشد که در بلوک‌های ماتریس احتمال انتقال یا ماتریس انتقال گذار کدگذاری شده است. توزیع مانای یک فرآیند شبه زاد و مرگ را می‌توان با استفاده از روش‌های هندسی ماتریسی محاسبه کرد.

ماتریس احتمال انتقال  $P$  برای یک زنجیر مارکف، می‌تواند روی مرز و قسمت‌های تکراری تجزیه شود. حالت‌های مرزی در مواردی که هیچ مشتری نباشد، مورد توجه قرار می‌گیرند و به طور کلی  $m+1$  تا از این حالت‌ها وجود دارند. حالت‌های تکراری از قسمت‌های تکراری ماتریس  $P$  هدایت می‌شوند. ماتریس را می‌توان به عنصراهایی که هر دو نوع از حالت‌ها را تشکیل می‌دهند، تقسیم کرد که در آن حالت‌های مرزی توسط بلوک‌هایی با اندازه‌ی  $(m+1) \times (m+1)$  و واحدهای تکراری با  $m \times m$  نشان داده می‌شوند. صف چندسرویس‌دهی زمان گسسته با ورودی‌های مرتبه ۱، یک توزیع حاشیه‌ای خاص را مشخص می‌کند.

زنجیر مارکف  $\{(N(t), X(t)) : t = 0, 1, \dots\}$  یک فرایند مارکف دوبعدی با فضای پارامتر  $E = \{0, 1, \dots\}^2$  است. توزیع مانا را می‌توان توسط روش‌های تحلیل ماتریسی و با استفاده از نظریه‌ی فرایندهای احیاکننده‌ی نوپیدایشی مارکف به صورت زیر محاسبه کرد:

نخست یک زنجیر مارکف نشانیده را در زمان‌های تکمیل سرویس ایجاد می‌کنیم. دوره‌های نشانیده‌ی

$$\{\tau_k : t = 0, 1, \dots\} \text{ که در آن } 0 < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3, \dots \text{ به شرح زیر تعریف می‌شوند:}$$

$$\tau_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \inf \{t > \tau_{k-1} : Z(t) = 1 \text{ or } 0 \leq X(t) \leq s-1\} & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

قرار دهید  $N(k) = N(\tau_k)$ ،  $k = 0, 1, \dots$

$$J_0 = s,$$

$$J_k = \begin{cases} X(\tau_k) & Z(\tau_k) = 0, k = 1, 2, \dots \\ s & Z(\tau_k) = 1, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

بسته‌های ورودی نزدیک و بعد از  $\tau_k$  به شرط  $J_k$ ، مستقل هستند. با توجه به این حقیقت، مشاهده می‌شود که  $X_k = \{(N_k, J_k) : k = 0, 1, \dots\}$  فرایند تجدید مارکف جدید با فضای حالت  $E$  است. ماتریس احتمال انتقال فرایند تجدید مارکف  $X_k$  به صورت زیر خواهد بود:

$$P = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \dots \\ A_0 & A_1 & A_2 & \dots \\ 0 & A_0 & A_1 & \dots \\ 0 & 0 & A_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

این حالت را یک ماتریس از نوع  $M/G/1$  گویند. در حالت  $(n, i)$ ، مولفه‌ی اول، یعنی  $n$  را سطح و مولفه‌ی دوم، یعنی  $i$  را فاز گویند. زیرا در ماتریس احتمال انتقال به جز سطر اول، هر سطر نسبت به سطر قبلی یکی به جلو انتقال می‌یابد و اعضای قبل از انتقال صفر می‌شوند، بنابراین زنجیر مارکف  $X_k$  را از سمت چپ رهاشده نیز نامند.

دوره  $\tau_n$  را به عنوان تعدادی از مراحل، تا زمانی که زنجیر  $X_k$  برای اولین بار به سطح  $n$  برسد تعریف می‌کنیم. سپس به ازای هر  $(i, j) \leq m$  و  $k \geq 1$

$$G_k(i, j) = P(\tau_n = k, X_k = (n, j) | X_0 = (n+1, i)).$$

اگر زنجیر مارکف  $X_k$  بازگشتی باشد، ماتریس  $G$  که در معادله‌ی نقطه ثابت  $G = \sum_{n=1}^{\infty} A_n G^n$  صدق می‌کند، یک ماتریس تصادفی است. همچنین ماتریس  $G$  می‌تواند به صورت بازگشتی  $G_k = \sum_{n=1}^{k-1} A_n G_{k-1}^n$  و  $G_1 = A_1$  محاسبه شود. طرح بازگشتی برای بردار احتمال مانای  $x = xP$  از  $P$  را می‌توان با استفاده از ماتریس  $G$  تعیین کرد. به این ترتیب که،  $x = (x_n; n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$  با  $x_n = (x_{n_i}; 1 \leq i \leq m)$  شامل احتمال‌های مانا برای سطح  $n$  است. اگر  $X_k$  بازگشتی مثبت باشد، آن‌گاه بردار  $x_n$  برای هر  $n \geq 1$  به صورت بازگشتی

$$x_n = \left( x \bar{B}_n + \sum_{k=1}^{n-1} x_k \bar{A}_{n+1-k} \right) (I - \bar{A}_1)^{-1}$$

$$\text{است که در آن } \bar{B}_n = \sum_{k=n}^{\infty} B_k G^{k-n} \text{ و } \bar{A}_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_k G^{k-n}.$$

$$\{(N(t), X(t)) : t = 0, 1, \dots\}$$

می‌تواند توسط قضایای حدی برای فرایندهای احیاکننده‌ی نوپیدایشی مارکف زمان گسسته به صورت زیر تعیین شود. یادآوری می‌شود، یک حالت در یک زنجیر مارکف، یک حالت بازگشتی مثبت است اگر زمان مورد انتظار برای بازگشت به آن حالت متناهی باشد.



**قضیه ۱. [۲۰]** فرض کنید  $\{F(t): t=0,1,\dots\}$  فرایند احیاکنندهی نوپیدایشی مارکف زمان گسسته روی فضای حالت شمارای  $S$  با دنبالهی تجدید مارکف  $\{Y_k, S_k: k=0,1,\dots\}$  باشند. اگر  $E$  فضای حالت شمارای فرایند مارکف  $\{Y_k: k=0,1,\dots\}$  باشد، برای  $i \in E$  و  $j \in S$  داریم:

$$\mu_i = E[S_1 | Y_1 = i],$$

$$\alpha_{ij} = E \left[ \sum_{t=0}^{S_1-1} 1_{\{F(t)=j\}} | Y_1 = i \right].$$

فرض کنید فرایند نیم مارکف زمان گسستهی  $\{Y(t): t=0,1,\dots\}$  توسط  $Y(t) = Y_k$  برای  $S_k \leq t \leq S_{k+1}$ ، بازگشتی تحویل ناپذیر، نادره‌ای و مثبت باشد. بنابراین برای  $j \in S$  و  $k \in E$  داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p\{F(t) = j | Y_1 = k\} = \frac{\sum_{i \in E} \pi_i \alpha_{ij}}{\sum_{i \in E} \mu_i \alpha_{ij}}$$

که در آن  $\pi = (\pi_i)_{i \in E}$  یک توزیع مانای فرایند مارکف  $\{Y_k: k=0,1,\dots\}$  است.

#### ۴ صف $DAR(1)/D/s$ با توزیع حاشیه‌ای شبه‌دوجمله‌ای منفی نوع دو

در پهن‌بند شبکه‌ی رقمی خدمات مجتمع (B-ISDN)<sup>۱</sup>، شبکه‌ی ATM، قرارداد اینترنت (IP)<sup>۲</sup>، بسته‌ها یا سلول‌های صدا، ویدئو و داده بیش از یک کانال انتقال مشترک بر اساس تقسیم‌بندی‌های آماری ارسال می‌شود. دشواری‌های این مدل‌ها از ترافیک ناشی از ساختارهای ورودی همبسته هستند. یک روش معمول برای تقریب این فرایند ورودی تجدید استفاده از روش‌های تحلیلی برای فرایندهای ورودی DAR پیشنهاد می‌شود. تأثیر خودهمبستگی می‌تواند در فرایندهای ترافیکی، در اندازه‌گیری‌های عملکرد صف مانند: میانگین طول صف، میانگین زمان‌های انتظار و احتمال‌های از دست رفته‌ی حافظه‌های میانی متناهی بسیار چشم‌گیر باشد.

یک فرایند تجدید مارکف در دوره‌های نشانیده از فرایند مارکف اصلی ساخته شده است و از این رو توزیع مانا از ساختار فرایند تجدید مارکف توسط روش‌های تحلیل ماتریسی محاسبه می‌شود و در پی آن توزیع مانای اندازه‌ی سیستم فرایند مارکف اصلی توسط فرایندهای احیاکنندهی مارکف محاسبه می‌شود. در این بخش فرایند ورودی یک صف چندسرویس‌دهی با  $S > 0$  سرویس با نرخ سرویس ثابت به وسیلهی  $DAR(1)$  با توزیع حاشیه‌ای شبه‌دوجمله‌ای منفی نوع دو مورد بررسی قرار گرفته است. این سیستم صف‌بندی چندسرویس‌دهی زمان گسسته با ورودی‌های اتورگرسو، برای مدل‌سازی صف ATM، با ترافیک همایش از راه دور کدگذاری شده‌ی VBR مناسب‌تر است. مدل  $DAR(1)$  توسط پارامترهای کمتر توصیف می‌شود و می‌توان آن را به آسانی با توزیع احتمال و نرخ خرابی تابع خودهمبستگی با مقدارهایی که توسط ترافیک واقعی اندازه‌گیری می‌شود منطبق

<sup>۱</sup> Broadband Integrated Services Digital Network

<sup>۲</sup> Internet Protocol

کرد. این توزیع مانای سیستم صف‌بندی از اندازه‌ی سیستم و توزیع زمان انتظار بسته‌ی دلخواه با کمک روش‌های تحلیل ماتریسی و قضیه‌ی احیاکننده‌ی نوپیدایشی مارکف حاصل می‌شود.

توزیع دوجمله‌ای منفی (NBD)<sup>۱</sup>، توزیع پواسون تعمیم‌یافته و توزیع بول-تانر در [۲۱] و توزیع پواسون تعمیم‌یافته بریده شده در صفر به عنوان حالت‌های خاص توزیع شبه‌دوجمله‌ای منفی نوع دو (QNBD-II)<sup>۲</sup> بررسی می‌شوند. این مدل به داده‌های واقعی از مشتریانی که برای بازرسی در یک فرودگاه منتظر هستند کاربرد دارد. تابع احتمال QNBD-II به صورت زیر است [۲۲]:

$$P(x; n, p_1, p_2) = \frac{(n+x-1)! p_1 (p_1 + x p_2)^{x-1}}{(n-1)! x! (1 + p_1 + x p_2)^{x+n}}, \quad x = 0, 1, \dots$$

در حالتی که  $p_2 = 0$ ، QNBD به NBD و زمانی که علاوه بر شرط قبلی  $n = 0$  نیز برقرار باشد، QNBD به توزیع شبه‌هندسی (QGS)<sup>۳</sup> با تابع احتمال  $\left(\frac{p_1}{1+p_1}\right)^x (1+p_1)^{-1}$  تبدیل می‌شود. همچنین QNBD به توزیع پواسون تعمیم‌یافته میل می‌کند که متاسفانه این توزیع به صوت سری‌های نامتناهی ظاهر می‌شود. روش گشتاوری برآوردهای مناسبی را برای پارامترهای توزیع ارائه نمی‌دهد، بنابراین مدل جدید توزیع QNBD برای  $0 < np_2 < 1$  و  $0 < p_1 < 1$  تابع احتمال زیر معرفی می‌شود:

$$p(x) = \frac{(np_2 - p_1 - 1)}{(np_2 - 1)} \binom{n+x-1}{x} \frac{p_1 (p_1 + x p_2)^{x-1}}{(1 + p_1 + x p_2)^{x+n+1}} \quad x = 0, 1, \dots \quad (2)$$

در حالتی که  $p_2 = 0$ ، این مدل جدید به توزیع دوجمله‌ای منفی تبدیل می‌شود. احتمال‌های QNBD-II با رخدادهای متوالی کاهش می‌یابد. این همگرایی در احتمال‌ها باعث به وجود آمدن کاربردهایی در قابلیت اطمینان، زیست‌سنجی و تحلیل بقا می‌شود. مدل QNBD-II یک مدل تک‌متغیره است و فقط گشتاور اول (میانگین) آن یک فرم بسته دارد. کران بالا و پایین مد ( $M$ ) به صورت  $\frac{np_1(n-1)}{1-p_1} < M < \frac{np_1-1}{1-p_1}$  است که در آن  $p_1 < 1$  و همچنین میانگین برابر  $\frac{np_1}{1-np_2}$  است که در آن  $np_2 < 1$ . فرض کنید  $X \sim QNBD(n, p_1, p_2)$  با تابع احتمال (۲) باشد. اگر  $n \rightarrow \infty$  به طوری که  $np_1 = \alpha$  و  $np_2 = \lambda$ ، آن‌گاه متغیر تصادفی  $X$  به توزیع پواسون تعمیم‌یافته با پارامترهای  $\alpha$  و  $\lambda$  میل می‌کند. همچنین اگر  $n \rightarrow \infty$  به طوری که  $n\lambda^{-1} = \alpha$  و  $\lambda^{-1} = p_2$ ، آن‌گاه متغیر تصادفی  $X$  به توزیع بول-تانر میل می‌کند.

با مقایسه‌ی اولین گشتاور نمونه از مدل مورد نظر با گشتاور جامعه‌ی متناظر (روش گشتاوری) نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\bar{X} = \frac{np_1}{1-np_2}. \quad (3)$$

<sup>1</sup> Negative Binomial Distribution

<sup>2</sup> Quasi-Negative Binomial Distribution-II

<sup>3</sup> Quasi-Geometric Distribution

با در نظر گرفتن  $x = 0$  در (۳) و مقایسه‌ی آن با فراوانی نسبی متناظرش یعنی  $f = \frac{np_2 - p_1 - 1}{(np_2 - 1)(1 + p_1)^{n+1}}$  و با استفاده از (۲) داریم:

$$\hat{p}_1 = \left[ \frac{1}{f} \left( 1 + \frac{x}{n} \right) \right]^{\frac{1}{n+1}} - 1. \quad (4)$$

با در نظر گرفتن مقدار اولیه‌ی  $n$  در (۴)، مقدار  $\hat{p}_1$  حاصل می‌شود و زمانی که هر دوی این مقادارها در (۳) جای‌گزین شود، مقدار  $\hat{p}_2$  محاسبه می‌شود. به همین ترتیب با انجام دادن این روند در تکرارهای متوالی می‌توان برآوردهای بهتری برای پارامترهای  $(n, p_1, p_2)$  پیدا کرد.

فرض کنید ورودی ATM با ترافیک همایش از راه دور کدگذاری شده‌ی VBR یک مدل  $DAR(1)$  با QNBD باشد. دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با مقادارهای مثبت  $\{Y(t): t = 0, 1, \dots\}$  را در نظر بگیرید و تعریف کنید  $b_x = P[Y(t) = x]$ ،  $x = 0, 1, \dots$ . اگر فرایند ورودی دارای توزیع QNBD-II باشد، فرایند  $DAR(1)$ ، یعنی  $\{X(t): t = 0, 1, \dots\}$  را توسط معادله‌ی رگرسیون به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X(0) = Y(0),$$

$$X(t) = (1 - Z(t))X(t-1) + Z(t)Y(t), t = 1, 2, \dots$$

که  $\{Z(t): t = 0, 1, \dots\}$  متغیرهای تصادفی برنولی مستقل و هم‌توزیع با احتمال‌های  $P[Z(t) = 0] = \beta$  و  $P[Z(t) = 1] = 1 - \beta$  است که  $0 \leq \beta < 1$ . فرض کنید  $\{Y(t): t = 0, 1, \dots\}$  و  $\{Z(t): t = 0, 1, \dots\}$  و  $X(0)$  از  $Y(t)$  و هم‌چنین  $Z(t)$  ها،  $t \geq 0$  مستقل باشند. در این صورت  $DAR(1)$  توسط پارامتر  $\beta$  و توزیع  $\{b_x: x = 0, 1, \dots\}$  از  $Y(t)$  تعریف می‌شود به‌طوری‌که:

$$X(0) = Y(0),$$

$$X(t) = \begin{cases} X(t-1) & w.p. \beta \\ Y(t) & w.p. 1 - \beta \end{cases} \quad Z(t) = 0 \text{ or } 1.$$

ماتریس احتمال انتقال یک مرحله‌ای فرایند  $\{X(t): t = 0, 1, \dots\}$  به‌صورت زیر است:

$$\beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + (1 - \beta) \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

ویژگی‌های  $DAR(1)$  در ذیل به‌طور خلاصه بیان می‌شوند:

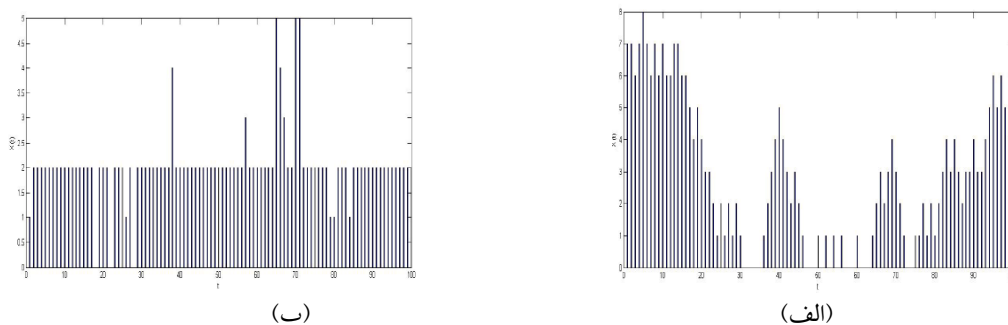
$$\{X(t): t = 0, 1, \dots\} \text{ مانا است؛} \quad (1)$$

$$X(t) \text{ و } Y(t) \text{ هم‌توزیع‌اند، از این رو } b_x = P[X(t) = x], x = 0, 1, \dots \quad (2)$$

(۳) تابع خودهمبستگی برای  $X(t)$  با تأخیر  $t$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\gamma(t) = \frac{\text{Cov}(X(\cdot); X(t))}{\text{Var}(X(\cdot))} = \beta^t, t = 0, 1, \dots$$

که پارامتر  $\beta$  نرخ خرابی تابع خودهمبستگی است. زمانی که  $\beta = 1$ ،  $X(t)$  همان  $Y(t)$  است و هم-چنین  $DAR(1)$  ورودی‌های مستقل و هم‌توزیع تولید می‌کند. مسیر نمونه‌ی شبیه‌سازی شده فرآیند  $DAR(1)$  با توزیع حاشیه‌ای مانا از نوع QNBD-II در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. مسیر نمونه‌ی شبیه‌سازی شده فرآیند  $DAR(1)$  با توزیع حاشیه‌ای مانا از نوع QNBD-II برای  $p_1 = 0.021$ ،  $n = 100$ ، (الف)  $\beta = 1$ ، (ب)  $\beta = 0.2$ .

## ۵ تحلیل زنجیر مارکف نشانیده

در یک مدل صف، زمان که مقدارهای صحیح را اختیار می‌کند را به شکاف‌هایی با اندازه‌ی مساوی تقسیم کرده و یک شکاف برای خدمت به یک بسته توسط یک سرویس‌دهنده مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرض کنید ورودی‌های بسته در آغاز شکاف‌ها و انحرافات در پایان شکاف‌ها رخ می‌دهد.  $\{X(t): t = 0, 1, \dots\}$  ورودی‌های بسته را نشان می‌دهد، به‌طوری که  $X(t)$  تعدادی از بسته‌های رسیده در شروع  $t$ -امین شکاف است. فرض کنید  $N(t)$  تعدادی از بسته‌ها در سیستم است (که اندازه‌ی سیستم نامیده می‌شود)، بلافاصله قبل از ورود در شروع  $t$ -امین شکاف است. سپس  $\{(N(t), X(t)): t = 0, 1, \dots\}$  یک فرایند مارکف دوبعدی از نوع صف  $M/G/1$  است. فضای حالت فرایند مارکف  $E = \{0, 1, \dots\}^2$  است. تعداد فازها نامتناهی است و هم‌چنین محاسبه‌ی توزیع مانای  $\{(N(t), X(t)): t = 0, 1, \dots\}$  برای کار کردن آسان نیست. در عمل محاسبه‌ی توزیع مانای فرایند جدید در دوره‌های نشانیده  $\{t_\tau, \tau = 0, 1, \dots\}$  که  $0 < t_1 < t_2 < \dots$  توسط روش تحلیل ماتریسی و با استفاده از فرایندهای احیاکننده‌ی نوپیدایشی نظریه‌ی مارکف به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$t_\tau = \begin{cases} 0 & \tau = 0 \\ \inf \{t > t_{\tau-1} : Z(t) = 1 \text{ or } 0 \leq X(t) \leq s-1\} & \tau = 1, 2, \dots \end{cases}$$

که به معادله‌ی زمان توقف معروف است. قرار دهید  $N_\tau = N(t_\tau)$  و  $\tau = 0, 1, \dots$

$$J_\tau = s,$$

$$J_\tau = \begin{cases} X(t_\tau) & Z(t_\tau) = 0, \quad \tau = 1, 2, \dots \\ s & Z(t_\tau) = 1, \quad \tau = 1, 2, \dots \end{cases}$$

ورودی‌های بسته در نقطه‌ی  $t_\tau$  و بعد از آن مستقل از اطلاعات پیشین  $t_\tau$  به شرط  $J_\tau$  هستند. از این رو

مشاهده می‌شود که  $\{(N_\tau, J_\tau) : \tau = 0, 1, \dots\}$  فرایند تجدید مارکف با فضای احتمال

$E = \{0, 1, \dots\} \times \{0, 1, \dots, s\}$  است. ماتریس احتمال انتقال فرایند تجدید مارکف به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(1) \text{ برای } n = 0, 1, \dots, s-1 \text{ و } i = 0, 1, \dots, s-1$$

$$(n, i) \rightarrow \begin{cases} (\max\{n-s+i, 0\}, i) & w.p. \beta \\ (\max\{n-s+i, 0\}, s) & w.p. 1-\beta \end{cases}$$

$$(2) \text{ برای } n = 0, 1, \dots$$

$$(n, s) \rightarrow \begin{cases} (\max\{n-s+i, 0\}, i) & w.p. b_i \beta, 0 \leq i \leq s-1 \\ (n-s+i, s) & w.p. b_i (1-\beta), s-n+1 \leq i \leq s-1 \\ (0, s) & w.p. \sum_{i=0}^{\min\{s-n, s-1\}} b_i (1-\beta) + g \cdot \delta_n \\ (n+l, s) & w.p. g_l, l \geq 0, n+l > 0 \end{cases}$$

که

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases}$$

$$g = b_s, \quad g_l = \sum_i b_{i+s} (1-\beta) \beta^{i-1}, l = 1, 2, \dots$$

ماتریس احتمال انتقال  $P$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P = \begin{pmatrix} B_s & A_{s+1} & A_{s+2} & \dots & A_{s-1} & A_s & A_{s+1} & \dots \\ B_{s-1} & A_s & A_{s+1} & \dots & A_{s-2} & A_{s-1} & A_s & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ B_1 & A_1 & A_2 & \dots & A_s & A_{s+1} & A_{s+2} & \dots \\ A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_{s-1} & A_s & A_{s+1} & \dots \\ 0 & A_0 & A_1 & \dots & A_{s-2} & A_{s-1} & A_s & \dots \\ 0 & 0 & A_0 & \dots & A_{s-3} & A_{s-2} & A_{s-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

که عناصر ماتریس نیز به صورت زیر هستند:

۱۴

$$\hat{B}_i = \begin{bmatrix} B_{\delta} & A_{\phi} & A_{\psi} & A_{\lambda} & A_{\eta} \\ B_{\phi} & A_{\delta} & A_{\phi} & A_{\psi} & A_{\lambda} \\ B_{\psi} & A_{\phi} & A_{\delta} & A_{\phi} & A_{\psi} \\ B_{\lambda} & A_{\psi} & A_{\phi} & A_{\delta} & A_{\phi} \\ B_{\eta} & A_{\psi} & A_{\psi} & A_{\phi} & A_{\delta} \end{bmatrix}, \hat{A}_i = \begin{bmatrix} A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{\eta} & A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{\lambda} & A_{\eta} & A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{\psi} & A_{\lambda} & A_{\eta} & A_{10} & A_{11} \\ A_{\phi} & A_{\psi} & A_{\lambda} & A_{\eta} & A_{10} \end{bmatrix}, \hat{A}_i = \begin{bmatrix} A_{15} & A_{16} & A_{17} & A_{18} & A_{19} \\ A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} & A_{18} \\ A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} \\ A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ \cdot & A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \cdot & \cdot & A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & A_{10} & A_{11} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{10} \end{bmatrix}, \hat{A}_i = \begin{bmatrix} A_{\delta} & A_{\phi} & A_{\psi} & A_{\lambda} & A_{\eta} \\ A_{\phi} & A_{\delta} & A_{\phi} & A_{\psi} & A_{\lambda} \\ A_{\psi} & A_{\phi} & A_{\delta} & A_{\phi} & A_{\psi} \\ A_{\lambda} & A_{\psi} & A_{\phi} & A_{\delta} & A_{\phi} \\ A_{\eta} & A_{\psi} & A_{\psi} & A_{\phi} & A_{\delta} \end{bmatrix}.$$

در حالت کلی می توان ماتریس احتمال انتقال  $P$  را به صورت زیر نشان داد:

$$P = \begin{pmatrix} \hat{B}_i & \hat{A}_i & \hat{A}_i & \cdots & \hat{A}_{n^*} \\ \hat{A}_i & \hat{A}_i & \hat{A}_i & \cdots & \hat{A}_{n^*-1} \\ \cdot & \hat{A}_i & \hat{A}_i & \cdots & \hat{A}_{n^*-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \hat{A}_i \end{pmatrix}$$

که  $n^* = \frac{N+s+1}{s} - 1$  یک ماتریس  $P$  از ساختار بالا از نوع  $M/G/1$  است که مشابه با زنجیر مارکف نشانیده در صف  $M/G/1$  هست و همان گونه که در بخش ۳ اشاره شد، در ماتریس احتمال انتقال به جز سطر اول، هر سطر نسبت به سطر قبلی یکی به جلو انتقال می یابد و اعضای قبل از انتقال صفر می شوند، بنابراین زنجیر مارکف  $X_k$  را از سمت چپ رها شده نامند. عناصر  $P$  می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\hat{B}_i = \begin{pmatrix} B_s & A_{s+1} & \cdots & A_{rs-1} \\ B_{s-1} & A_s & \cdots & A_{rs-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_1 & A_1 & \cdots & A_s \end{pmatrix}.$$

توزیع مانای فرایند تجدید مارکف توسط روش های تحلیل ماتریسی ذکر شده در بخش ۳ محاسبه می شود.

**مرحله اول)** حل نامنفی مینیم  $G$  از معادله ی ماتریس  $G = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n G^n$  که  $G$  می تواند توسط تکرار زیر تعریف شود:

$$\begin{aligned} G_0 &= \cdot \\ G_1 &= \hat{A}_1 \\ G_k &= \sum_{n=1}^{K-1} \hat{A}_n G_{k-1}^n, k = 2, 3, \dots \\ G &= \sum_{k=1}^{\infty} G_k. \end{aligned}$$

$G$  یک ماتریس تصادفی است و تکرار آن تا وقتی که  $\|1-G\| < \varepsilon$  به  $\varepsilon = 0.0001$  برسد متوقف می‌شود. با توجه به این تکرارها، حد بالایی  $k$  و  $n^* = k - 1$  (که  $n^*$  شاخص بریده‌ی  $N$  در  $G$  تصادفی شده است) را می‌توان محاسبه کرد.

**مرحله‌ی دوم)**  $H = \sum_{n=1}^{n^*} \hat{B}_n G^n$  و یک بردار سطری مثبت  $H$  را که در شرط  $hH = h$  صدق می‌کند پیدا کنید.

**مرحله‌ی سوم)** با

$$x_1 = h,$$

$$x_n = \left( x_1 \sum_{i=1}^{n^*} \hat{B}_{n+i} G^i + \sum_{l=1}^{n-1} x_l \sum_{i=1}^{n^*} \hat{A}_{n-l+i+1} G^i \right) \times \left( I - \sum_{i=1}^{n^*} \hat{A}_{i+1} G^i \right)^{-1}, n = 1, \dots, n^*$$

شروع کنید.

**مرحله‌ی چهارم)** در پایان داریم

$$\left( (\pi_{nS,1}, \dots, \pi_{nS,S}), \dots, (\pi_{(n+1)S-1,1}, \dots, \pi_{(n+1)S-1,S}) \right) = Cx_n, n = 1, \dots, n^*$$

که  $C = \left[ \sum_{n=1}^{n^*} x_n e \right]^{-1}$  و  $e$  بردار ستونی  $(S+1)$  بعدی با مولفه‌های ۱ هستند.

در انتهای این بخش، توزیع مانای  $\{N(t), X(t), t = 0, 1, \dots\}$  محاسبه می‌شود. اگر دنباله‌ی تجدید مارکف در صف به صورت  $\{(N_\tau, J_\tau), t_\tau\}, \tau = 0, 1, \dots\}$  و

$$\frac{((N(t+t_\tau), X(t+t_\tau)): t = 0, 1, \dots)}{((N(v), X(v)), 0 \leq v < t_\tau, N_\tau, J_\tau) = (n, i))}$$

به‌طور تصادفی هم‌ارز با

$$\frac{(N(t), X(t), t = 0, 1, \dots)}{(N_\tau, J_\tau) = (n, i)}$$

باشد،  $\{N(t), X(t), t = 0, 1, \dots\}$  یک فرایند احیا کننده‌ی مارکف زمان گسسته با دنباله‌ی تجدید مارکف  $\{(N_\tau, J_\tau), t_\tau\}, \tau = 0, 1, \dots\}$  است. احتمال‌های حدی  $\{(N(t), X(t)) = (n, i)\}$   $p_{nj} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{(N(t), X(t)) = (n, i)\}$  از  $\{N(t), X(t), t = 0, 1, \dots\}$  توسط قضیه‌ی ۱، به‌صورت زیر حاصل شده است:

$$p_{nj} = \frac{\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=1}^S \pi_{li} E \left[ \sum_{t=t_\tau}^{t_{\tau+1}-1} 1_{(N(t), X(t)) = (n, j)} \middle| (N_\tau, J_\tau) = (l, i) \right]}{\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=1}^S \pi_{li} E \left[ t_{\tau+1} - t_\tau \middle| (N_\tau, J_\tau) = (l, i) \right]}. \quad (5)$$

صورت کسر معادله‌ی (۵) به‌صورت زیر است:



$$\left\{ \begin{array}{ll} \pi_{nj} + \pi_{ns} b_j & 0 \leq j \leq s-1 \\ \frac{\pi_{ns} b_s}{1-\beta} & j = s \\ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{j-s} \rfloor} \pi_{n-i(j-s),s} b_j \beta^i & j \geq s+1. \end{array} \right.$$

قرار دهید:

$$E \left[ \sum_{t=t_\tau}^{t_{\tau+1}-1} 1_{(N(t), X(t))=(n,j)} \middle| (N_\tau, J_\tau) = (l, i) \right] = \begin{cases} 1 & i = j, 0 \leq i \leq s-1, n=1 \\ b_j & i = s, 0 \leq j \leq s-1, n=1 \\ \frac{b_s}{1-\beta} & i = s, j = s, n=1 \\ b_j \beta^{\frac{n-1}{j-s}} & i = s, j > s, n \geq 1, \frac{n-1}{j-s} \\ \cdot & \text{otherwise} \end{cases}$$

پس:

$$E [t_{\tau+1} - t_\tau | (N_\tau, J_\tau) = (l, i)] = \begin{cases} 1 & 0 \leq i \leq s-1 \\ \sum_{r=0}^{s-1} b_r + \sum_{r=s}^{\infty} b_r \frac{1}{1-\beta} & i = s. \end{cases}$$

مخرج کسر معادله ی (۵) به صورت زیر است:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{s-1} \pi_{li} + \sum_{l=0}^{\infty} \pi_{ls} \left( \sum_{r=0}^{s-1} b_r + \sum_{r=s}^{\infty} b_r \frac{1}{1-\beta} \right) \quad (6)$$

که  $\left( \sum_{l=0}^{\infty} \pi_{l0}, \dots, \sum_{l=0}^{n^*} \pi_{ls} \right)$  بردار احتمال مانای فرایند مارکف  $\{J_\tau : \tau = 0, 1, \dots\}$  است و ماتریس احتمال

انتقال آن به صورت زیر تعریف می شود

$$\left( P(J_{\tau+1} = j | J_\tau = i) \right)_{0 \leq i, j \leq s} = \begin{pmatrix} \beta & \cdot & \cdots & \cdot & 1-\beta \\ \cdot & \beta & \cdots & \cdot & 1-\beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \beta & 1-\beta \\ \beta b_0 & \beta b_1 & \cdots & \beta b_{s-1} & 1-\beta \sum_{r=0}^{s-1} b_r \end{pmatrix}$$

و ماتریس انتقال بی نهایت کوچک آن به صورت زیر است:

$$Q = \begin{pmatrix} -(1-\beta) & \cdot & \cdots & \cdot & (1-\beta) \\ \cdot & -(1-\beta) & \cdots & \cdot & (1-\beta) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & -(1-\beta) & (1-\beta) \\ \beta b_0 & \beta b_1 & \cdots & \beta b_{s-1} & -\beta \sum_{r=0}^{s-1} b_r \end{pmatrix}$$

که معادلات تعادل آن  $\pi Q = 0$  و  $\pi e = 1$  هستند.

به وسیله‌ی حل معادلات تعادل، توزیع مانای فرایند مارکوف  $\{J_\tau : \tau = 0, 1, \dots\}$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \pi_{li} = \begin{cases} \frac{\beta b_i}{1 - \beta \sum_{r=s}^{\infty} b_r} & 0 \leq j \leq s-1 \\ \frac{1 - \beta}{1 - \beta \sum_{r=s}^{\infty} b_r} & i = s. \end{cases}$$

به وسیله‌ی جایگزین کردن این معادله در (۶)، مخرج کسر سمت راست (۵) برابر  $\mu = \left(1 - \beta \sum_{r=s}^{\infty} b_r\right)^{-1}$  خواهد بود.

به عنوان مثال  $\{N(t), X(t), t = 0, 1, \dots\}$  از  $n, j = 0, 1, \dots$ ،  $p_{nj} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{(N(t), X(t)) = (n, i)\}$  توسط معادله‌ی زیر یافت می‌شود:

$$p_{nj} = \begin{cases} \mu^{-1} (\pi_{nj} + \pi_{ns} b_j) & 0 \leq j \leq s-1 \\ \mu^{-1} \frac{\pi_{ns} b_s}{1 - \beta} & j = s \\ \mu^{-1} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{j-s} \rfloor} \pi_{n-i(j-s), s} b_j \beta^i & j \geq s+1 \end{cases}$$

## ۷ توزیع مانای زمان انتظار یک بسته

زمان انتظار بسته‌ی دلخواه در وضعیت پایا به صورت  $W$  تعریف می‌شود. پس برای  $w = 0, 1, \dots$  داریم  $p(W = w) = \frac{A}{B}$  که در آن  $A$  میانگین تعداد ورودی‌ها در یک شکاف بر حسب وضعیت پایا، که زمان انتظار آن  $W$  است و  $B$  میانگین تعداد ورودی‌ها در یک شکاف که  $j$  بسته‌ی ورودی در شروع از  $t$ -امین شکاف و  $n$  بسته قبل از آن وجود دارد. بنابراین  $N(t) = n$  و  $X(t) = j$  از این رو، تعداد بسته‌هایی که دارای زمان انتظار  $W$  هستند، در میان آن‌هایی که در شروع از  $t$ -امین شکاف وارد می‌شوند به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \min\{s(w+1) - n, j\} & sw < n < s(w+1) \\ \min\{n + j - sw, s\} & n \leq sw \leq n + j \\ \cdot & ow. \end{cases}$$

بنابراین

$$A = \sum_{n=0}^{sw} \sum_{j=sw-n+1}^{\infty} p_{nj} \min\{n = j - sw, s\} + \sum_{n=sw+1}^{s(w+1)-1} \sum_{j=1}^{\infty} p_{nj} \min\{s(w+1) - n, j\}.$$

$\lambda$  میانگین تعداد ورودی‌ها در یک شکاف است. بنابراین، توزیع مانای زمان انتظار  $W$ ، از یک بسته‌ی دلخواه، توسط معادله‌ی زیر، برای  $w = 0, 1, \dots$  حاصل می‌شود:

$$P(W=w) = \frac{1}{\lambda} \left( \sum_{n=0}^{sW} \sum_{j=sW-n+1}^{\infty} p_{nj} \min\{n=j-sW, s\} + \sum_{n=sW+1}^{s(W+1)-1} \sum_{j=1}^{\infty} p_{nj} \min\{s(W+1)-n, j\} \right)$$

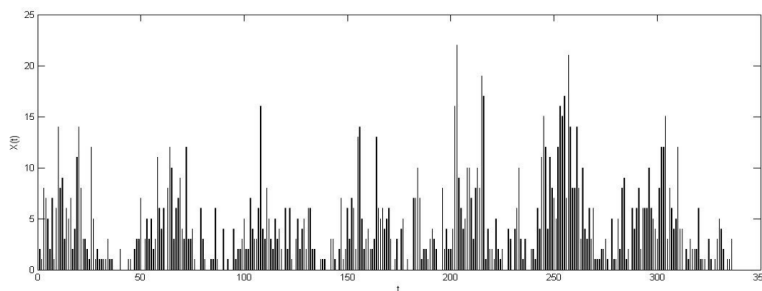
## ۸ تحلیل داده‌های واقعی

در این بخش یک مدل واقعی بر اساس داده‌های مربوط به تعداد مسافری که از ساعت ۸ صبح تا ۱۱:۳۰ شب وارد فرودگاه می‌شوند را در نظر بگیرید (جدول ۱). داده‌ها که در سایت [www.westminstercollege.edu](http://www.westminstercollege.edu) قابل مشاهده است، به مدت یک هفته جمع‌آوری شده و شامل تمام دوره‌های اشتغال و بی‌کاری است.

جدول ۱. داده‌های مربوط به تعداد مسافران که وارد فرودگاه می‌شوند

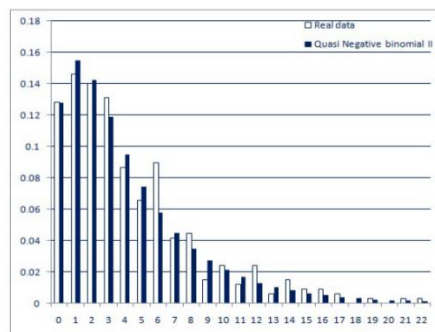
| تعداد | فراوانی | تعداد | فراوانی |
|-------|---------|-------|---------|
| ۰     | ۴۳      | ۱۲    | ۸       |
| ۱     | ۴۹      | ۱۳    | ۲       |
| ۲     | ۴۷      | ۱۴    | ۵       |
| ۳     | ۴۴      | ۱۵    | ۳       |
| ۴     | ۲۹      | ۱۶    | ۳       |
| ۵     | ۲۲      | ۱۷    | ۲       |
| ۶     | ۳۰      | ۱۸    | ۰       |
| ۷     | ۱۴      | ۱۹    | ۱       |
| ۸     | ۱۵      | ۲۰    | ۰       |
| ۹     | ۵       | ۲۱    | ۱       |
| ۱۰    | ۸       | ۲۲    | ۱       |
| ۱۱    | ۴       | جمع   | ۳۳۶     |

داده‌های خروج مشتری را می‌توان به صورت مدل  $DAR(1)$  در نظر گرفت که در آن  $X(t)$  تعداد مشتریان منتظر خدمات است که در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲. داده‌های خروج مشتری با استفاده از توزیع  $DAR(1)$

آزمون کولموگروف-اسمیرنوف، یک آزمون آماری ناپارامتری است که برای مقایسه دو توزیع احتمال و ارزیابی اینکه آیا یک نمونه از یک توزیع خاص آمده است استفاده شود. آزمون کولموگروف-اسمیرنوف، فرض  $H$  که بیانگر این است که داده‌ها از مدل  $DAR(1)$  با توزیع کناری QNBD-II، با پارامترهای  $\hat{p}_1 = 0.021$  و  $\hat{p}_r = 0.0513$  هستند را تایید می‌کند. آماره آزمون برابر  $0.0179$  و مقدار بحرانی متناظر با سطح معنی‌داری  $0.01$  برابر با  $0.0889$  است. این حقیقت نشان می‌دهد فرض تعداد ورودی‌ها از  $DAR(1)$  با توزیع کناری QNBD-II پیروی می‌کند (شکل ۳) در سطح معنی‌داری  $0.01$  رد نمی‌شود. این حقیقت نشان می‌دهد، با توجه به نمونه موجود و در سطح معنی‌داری  $0.01$ ، دلیلی برای رد فرض  $H$  مبنی بر این که داده‌ها از مدل  $DAR(1)$  با توزیع کناری QNBD-II، با پارامترهای  $\hat{p}_1 = 0.021$  و  $\hat{p}_r = 0.0513$  هستند وجود ندارد. سطح معنی‌داری  $0.01$ ، نشان‌دهنده این حقیقت است که احتمال رد فرض  $H$ ، با فرض اینکه درست باشد برابر با  $0.01$  است.



شکل ۳. هیستوگرام احتمال داده‌های مسافران فرودگاه با توزیع  $DAR(1)$  و توزیع حاشیه‌ای QNBD-II و  $\hat{p}_1 = 0.021$  و  $\hat{p}_r = 0.0513$ .

با استفاده از روش تحلیل ماتریسی، توزیع مانای اندازه سیستم و زمان انتظار یک مشتری دلخواه برای صف  $\lambda = 4/3125$  محاسبه می‌شود. در اینجا میانگین ورود برابر  $\lambda = 4/3125$  است. برای برقراری شرط پایداری، تعداد سرویس‌دهنده‌ها را برابر با  $S = 5$  اختیار می‌کنیم. یعنی  $\frac{\lambda}{S} = 0.8625$ . با توجه به این که ظرفیت ارایه شده  $1 < \frac{\lambda}{S}$ ، شرایط پایداری سیستم صف برقرار است، یعنی صف به حالت پایا می‌رسد. همچنین مقدار تابع خودهمبستگی برابر با  $\beta = 0.1$  و  $\hat{p}_1 = 0.021$  و  $\hat{p}_r = 0.0513$ . جدول ۲ و ۳، توزیع مانای زمان انتظار یک مشتری دلخواه و اندازه سیستم را نشان می‌دهد.

جدول ۲. محاسبه  $P(W = w)$  برای  $\beta = 0.1$  و  $\lambda = 4/3125$  و  $S = 5$ .

| $w$      | $P(W = w)$ |
|----------|------------|
| ۰        | ۰/۲۸۳۲     |
| ۱        | ۰/۱۱۹۵     |
| ۲        | ۰/۰۵۸۹     |
| ۳        | ۰/۰۳۸۰     |
| $\vdots$ | $\vdots$   |

جدول ۳. محاسبه  $p_{nj}$  برای  $\beta = 0/1$  و  $\lambda = 4/3125$  و  $S = 5$ .

| n | j      |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|   | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      |
| 0 | 0.1025 | 0.1239 | 0.1140 | 0.0945 | 0.0751 | 0.0585 | 0.0410 | 0.0319 | 0.0248 | 0.0193 |
| 1 | 0.0071 | 0.0094 | 0.0084 | 0.0088 | 0.0088 | 0.0045 | 0.0031 | 0.0024 | 0.0019 | 0.0015 |
| 2 | 0.0057 | 0.0069 | 0.0070 | 0.0066 | 0.0070 | 0.0036 | 0.0025 | 0.0019 | 0.0015 | 0.0012 |
| 3 | 0.0047 | 0.0058 | 0.0058 | 0.0058 | 0.0056 | 0.0030 | 0.0021 | 0.0016 | 0.0013 | 0.001  |
| 4 | 0.0047 | 0.0058 | 0.0058 | 0.0058 | 0.0056 | 0.0030 | 0.0021 | 0.0016 | 0.0013 | 0.001  |
| 5 | 0.0031 | 0.0037 | 0.0038 | 0.0038 | 0.0039 | 0.0020 | 0.0014 | 0.0014 | 0.0008 | 0.0006 |
| 6 | 0.0026 | 0.0031 | 0.0031 | 0.0032 | 0.0032 | 0.0016 | 0.0012 | 0.0009 | 0.0007 | 0.0005 |
| 7 | 0.002  | 0.0024 | 0.0025 | 0.0024 | 0.0025 | 0.0013 | 0.0009 | 0.0007 | 0.0005 | 0.0004 |
| 8 | 0.0016 | 0.0019 | 0.0019 | 0.0019 | 0.0019 | 0.001  | 0.0007 | 0.0006 | 0.0004 | 0.0003 |
| 9 | 0.0016 | 0.0019 | 0.0019 | 0.0019 | 0.0019 | 0.001  | 0.0007 | 0.0006 | 0.0004 | 0.0003 |
| ⋮ | ⋮      | ⋮      | ⋮      | ⋮      | ⋮      | ⋮      | ⋮      | ⋮      | ⋮      | ⋮      |

## ۹ نتیجه گیری

برای مدل سازی صف ATM با ترافیک همایش از راه دور کدگذاری شده ی VBR، استفاده از سیستم صف بندی چندسرویس دهی زمان گسسته با ورودی های اتورگرسیو توصیه می شود. مدل  $DAR(1)$  توسط پارامترهای کمتر توصیف می شود و می توان آن را به آسانی با توزیع احتمال و نرخ خرابی تابع خودهمبستگی، با مقدارهایی که توسط ترافیک واقعی اندازه گیری می شود منطبق کرد. این توزیع مانای سیستم صف بندی از اندازه ی سیستم و توزیع زمان انتظار بسته ی دلخواه، با کمک روش های تحلیل ماتریسی و قضیه ی احیا کننده ی نوپیدایشی مارکف حاصل می شوند. از تعریف تابع خودهمبستگی، پارامتر  $\beta$  ی بزرگ تر، فروپاشی خودهمبستگی فرایند ورودی را با سرعت کمتری کاهش می دهد. در اندازه ی سیستم و زمان انتظار توزیع مانا، بررسی شده که پارامتر  $\beta$  ی بزرگ به طور تصادفی بزرگ تر از حالتی هست که پارامتر  $\beta$  کوچک باشد. هم چنین اندازه ی سیستم و زمان انتظار مانا، زمانی که پارامتر ورودی توزیع حاشیه ای کاهش یابد، افزایش می یابند.

## منابع

- [1] Neuts, M.F. (1989). Structured stochastic matrices of the M/G/1 type and their applications, New York: Dekker.
- [2] Möller, T. A., Weiß, C. H. (2020). Generalized discrete autoregressive moving-average models. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 36(4), 641-659.
- [3] Thornton, M. A., Chambers, M. J. (2013). Continuous-time autoregressive moving average processes in discrete time: representation and embeddability. Journal of Time Series Analysis, 34(5), 552-561.
- [4] Cakiroglu, M. O., Kurban, H., Buxton, E., Dalkilic, M. (2025). A novel discrete time series representation with de bruijn graphs for enhanced forecasting using timesnet, IEEE Access.
- [5] Conway, G. D. (2024). A short manual to discrete time series analysis Technical Report (Max Plank Institute for Plasma Physics). IPP2024-04.
- [6] Kulyukin, V. A., Kulyukin, A. V., Meikle, W. G. (2025). Discrete Time Series Forecasting in Non-Invasive Monitoring of Managed Honey Bee Colonies: Part II: Are Hive Weight and In-Hive Temperature Seasonal and Colony-Specific?, Sensors (Basel, Switzerland), 25(14), 4319.
- [7] McKenzie, E., (2003). Discrete variate time series. In D.N. Shanbhag and C.R. Rao (Eds), Handbook of Statistics 21, stochastic processes, modeling and simulation. (573-606), Amsterdam: North-Holland.
- [8] Khodayifar, S, Raayatpanah, M. A., Fouladi, A. (2019). Optimal Coding Subgraph Selection under Survivability Constraint, Journal of Operational Research in its Applications 16(1), 11-28 (In Persian).

- [9] Lakatos, L., Szeidl, L., Telek, M. (2013). Introduction to queueing systems with telecommunication applications, 388, Springer.
- [10] Upadhyaya, S. (2016). Queueing systems with vacation: an overview. International journal of mathematics in operational research, 9(2), 167-213.
- [11] Elwalid, A., Heyman, D., Laksman, T.V., Mitra, D., Weiss, A. (1995). Fundamental Bounds and Approximations for ATM Multiplexes with Applications to Video Teleconferencing. IEEE Journal of Selected Areas in Communications, 13(6), pp.1004-1016.
- [12] Hwang, G.U., Choi, B.D., Kim, J.K. (2002). The waiting time analysis of a discrete time queue with arrivals as an autoregressive process of order 1. Journal of Applied Probability, 39(3), 619-629.
- [13] Hwang, G.U., Sohraby, K. (2003). On the exact analysis of a discrete-time queueing system with autoregressive inputs. Queueing Systems, 43(1-2), pp.29-41.
- [14] Kim, B., Chang, Y., Kim, Y. C., Choi, B. D. (2007). A queueing system with discrete autoregressive arrivals. Performance Evaluation, 64, 148-161.
- [15] Fiems, D., Prabhu, B., De Turck, K. (2013). Analytic approximations of queues with lightly- and heavily-correlated autoregressive service times. Annals of Operations research, 202(1), 103-119.
- [16] Abraham, B., Jose, K. K. (2013). Analysis of queueing system with discrete autoregressive arrivals having DML as marginal distribution. Statistica, 73(3), 317-339.
- [17] Ross, S. M. (2023). Introduction to Probability Models. USA: Academic Press.
- [18] Yazdani Khodashahri, M. B, Nasl Mosavi, S. H., Hosseini Shirvani, M. (2021). Optimal Stock Portfolio Selection Using Hybrid Meta-Heuristic Algorithms, Journal of Operational Research in its Applications, 18(1), 101-124 (In Persian).
- [19] Kendall D. G. (1953). Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain. Annals of Mathematical Statistics, 24(3), 338-354.
- [20] Latouche, G., Ramaswami, V., Sethuraman, J., Sigman, K., Squillante, M. S., Yao, D. (2012). Matrix-analytic methods in stochastic models, Springer Science & Business Media.
- [21] Trivedi, B. S., Patel, M. N. (2019). Estimation of Parameters of Misclassified Size Biased Borel Tanner Distribution. Advances in Analytics and Applications, 243-260.
- [22] Sen, K., Jain, R. (1996). Generalized Markov-Polya-urn-model with pre-determined strategies. Journal of Statistical Planning and Inference, 54, 119-133.