

ساختار یک کلاس از روش‌های دوگامی باحافظه برای حل معادلات غیر خطی

ولی ترکاشوند^{۲،۱*}

۱- دکتری، دانشگاه فرهنگیان، مرکز آموزش عالی شهید بهشتی، تهران، ایران

۲- دکتری، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

رسید مقاله: ۱۵ دی ۱۴۰۰

پذیرش مقاله: ۱۸ تیر ۱۴۰۱

چکیده

در این مقاله یک روش دوگامی بهین مرتبه ۴ با دو پارامتر خودشتابگر را برای حل معادلات غیرخطی ساخته‌ایم. در ادامه نیز با تقریب پارامترهای خودشتابگر یک کلاس از روش‌های جدید باحافظه که کاراترین آنها مرتبه‌ی همگرایی ۶/۳۷ یعنی با ۵۹/۳۷ درصد بهبود مرتبه‌ی همگرایی را دارد، مطرح شده است. مزیت دیگر این روش‌های جدید این است که نیازی به محاسبه مشتق ندارند. با استفاده از این روش‌های شبه استیفنس معادلات غیرخطی دارای ریشه ساده، با تقریب اولیه‌ی مناسب ریشه حل شده است تا درستی قضایای مطرح‌شده را با مثال‌های عددی نشان دهیم.

کلمات کلیدی: معادلات غیرخطی، روش باحافظه، پارامتر خودشتابگر، درونیابی نیوتن.

۱ مقدمه

روش تکراری مرتبه دوم نیوتن^[۱] معروف‌ترین روش برای حل معادلات غیرخطی است. اما نقطه ضعف آن محاسبه مشتق می‌باشد. این روش مشهور و معادله خطایش به صورت زیر می‌باشد:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

و معادله خطا

$$e_{k+1} = c_r e_k^r + o(e_k^r), \quad c_r = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

می‌باشد. برای حل مشکل محاسبه مشتق، استیفنس^[۲] در سال ۱۹۳۳، مشتق مرتبه اول تابع را با تفاضل تقسیم‌شده مرتبه اول نیوتن تقریب زد:

*عهده‌دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: torkashvand1978@gmail.com

$$f'(x_k) \approx f[x_k, w_k] = \frac{f(x_k) - f(w_k)}{x_k - w_k}.$$

و روش مرتبه دو خود را به صورت زیر ارائه نمود:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, w_k = x_k + f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

معادله خطای این روش بدون حافظه نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$e_{k+1} = (1 + f'(\alpha))c_\gamma e_k^\gamma + o(e_k^\gamma), \quad c_\gamma = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)},$$

شاخص کارایی هر دو روش فوق برابر است با

$$\sqrt[2]{2} = 1/414$$

در ادامه حل معادلات غیرخطی روش‌های دوگامی مطرح شد. ۲۷ سال بعد، در سال ۱۹۶۰ مشهورترین روش دوگامی بدون حافظه را استروفسکی^۲ ارائه نمود [۳]. این روش به صورت زیر است:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \times \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)}. \end{cases} \quad (3)$$

این روش دارای مرتبه همگرایی ۴ و معادله خطای آن به صورت زیر است:

$$e_{k+1} = (c_\gamma^2 - c_\gamma c_\gamma) e_k^4 + O(e_k^5), \quad c_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k! f'(\alpha)}, \quad k = 2, 3, \dots$$

۶ سال بعد از استروفسکی، جارات^۳ [۴] روش بدون حافظه دوگامی خود را به صورت زیر ارائه نمود:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{1}{2} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k) - 3f\left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)}. \end{cases} \quad (4)$$

این روش بهین دارای مرتبه همگرایی ۴ و معادله خطای آن به صورت زیر است:

$$e_{k+1} = \left(c_\gamma^2 - c_\gamma c_\gamma + \frac{c_\gamma}{9} \right) e_k^4 + O(e_k^5).$$

در سال ۱۹۷۳، کینگ^۴ [۵] خانواده تک پارامتری خود را که روش استروفسکی نیز جزء آنهاست، به صورت زیر ارائه نمود:

¹ J.F. Steffensen

² A.M. Osrowski

³ P. Jarrat

⁴ R.F. King

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k=0,1,2,\dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \times \frac{f(x_k) + \beta f(y_k)}{f(x_k) + (\beta - 2)f(y_k)}. \end{cases} \quad (5)$$

این روش بهین دارای مرتبه همگرایی ۴ است و معادله خطای آن بصورت زیر می باشد:

$$e_{k+1} = ((1+2\beta)c_r^r - c_r c_r^r) e_k^r + O(e_k^\delta).$$

در سال ۲۰۰۸، چان [۶] روش مرتبه چهار زیر را با استفاده از ایده تابع وزن ارایه نمود:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, t_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}, k=0,1,2,\dots, \\ h(t_k) = h(0) + h'(0) \times t_k, h(0) = 1, h'(0) = -2, |h''(0)| < \infty, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k) \times h(t_k)}. \end{cases} \quad (6)$$

این روش نیز دارای مرتبه همگرایی ۴ و معادله خطای آن به صورت زیر است:

$$e_{k+1} = (c_r^r - c_r c_r^r) e_k^r + O(e_k^\delta).$$

در سال ۲۰۱۰ نیز لیو^۲ و همکاران [۷] روش مرتبه چهار زیر را ارایه نمودند:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, w_k = x_k + f(x_k), k=0,1,2,\dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]^r} f(y_k). \end{cases} \quad (7)$$

شاخص کارایی روش های بهین مرتبه چهار فوق برابر است با [۳]:

$$\frac{1}{4^{\frac{1}{3}}} = 1/5874 \text{ به توان معکوس تعداد ارزیابی تابع}$$

افراد دیگری نیز روش های دوگامی بدون حافظه را برای حل معادلات غیرخطی به کار بردند. از جمله می توان به کانگ^۳ - تراب^۴ [۸]، چان [۹ و ۱۰]، کنسال^۵ و همکاران [۱۱]، کوردرو^۶ و همکاران [۱۲، ۱۳]، سلیمانی و همکاران [۱۴] و... اشاره نمود.

در ادامه این مقاله در بخش بعدی به بیان مساله پرداخته ایم و نیز در بخش سوم روش های دوگامی بهین بدون حافظه را با دو پارامتر خودشتابگر معرفی خواهیم نمود. سپس در بخش چهارم روش های جدید با حافظه را با ۵۹/۳۷ درصد بهبود مرتبه همگرایی معرفی خواهیم نمود. در ادامه نیز در بخش پنج، صحت قضایای مطرح شده در بخش دو و سه را با ذکر مثال های عددی خواهیم دید. در پایان نیز نتیجه گیری را ملاحظه خواهیم کرد.

¹ C.Chun

² Zhongli Liu

³ H.T.Kung

⁴ J.F.Traub

⁵ M.Kansal

⁶ A.Cordero

۲ بیان مساله

در این پژوهش روش‌های با حافظه و بدون حافظه برای حل معادلات غیرخطی مورد توجه قرار گرفته است. از آنجا که بسیاری از معادلات غیرخطی دارای ریشه دقیق نمی‌باشند، برای حل این معادلات از روش‌های تکراری می‌توان استفاده نمود. این روش‌ها نوع قدیمی ترشان، روش‌های بدون حافظه هستند که شاخص کارایی پایین‌تری دارند. از این رو محققین و پژوهشگران این حوزه روش‌های با حافظه را که دارای کارایی بالاتری هستند، برای حل معادلات غیرخطی به کار گرفته‌اند. در این کار نیز معادلات غیرخطی با استفاده از این روش حل شده است. برای این منظور ابتدا روش بدون حافظه مطرح‌شده را با ورود پارامترهای خودشتابگر به یک روش با حافظه با کارایی بالاتر و نیز بهبود مرتبه همگرایی تبدیل کرده‌ایم و در ادامه نیز پارامتر و یا پارامترهای داده‌شده را تقریب زده‌ایم و به این ترتیب بدون افزایش هزینه محاسبات کارایی روش را ارتقا داده‌ایم.

۳ روش‌های بدون حافظه

روش معرفی شده لیو و همکاران [۷] که یک روش بدون حافظه است را می‌توان با ورود یک پارامتر خود شتابگر به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, w_k = x_k + \gamma f(x_k), k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]^2} f(y_k). \end{cases} \quad (8)$$

این روش با سه فراخوانی $f(x_k), f(w_k), f(y_k)$ مرتبه همگرایی چهار دارد، از این رو طبق حدس کانگ-تراب بهین می‌باشد. قضیه زیر خطای روش بهین دو گامی بدون حافظه (۸) را مشخص می‌کند.

$$e_{n+1} = (1 + \gamma f'(\alpha)) c_r ((2 + \gamma f'(\alpha)) c_r^2 - (1 + \gamma f'(\alpha)) c_r e_n^* + O(e_n^5)). \quad (9)$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n! f'(\alpha)}, n = 2, 3, \dots \quad \text{که}$$

قضیه ۱-۳

فرض کنید $\alpha \in I$ ریشه ساده تابع به اندازه کافی دیفرانسیل پذیر $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ روی بازه‌ی باز I باشد. اگر x به اندازه کافی به ریشه α نزدیک باشد، آنگاه روش (۸) دارای حداقل مرتبه همگرایی ۴ بوده و در معادله خطای (۹) صدق می‌کند.

برهان: فرض کنید $e_k = x_k - \alpha, e_{k+1} = x_{k+1} - \alpha, e_{k,y} = y_k - \alpha, e_{k,w} = w_k - \alpha$

با استفاده از بسط تیلور تابع f حول نقطه‌ی $x_n = \alpha$ و با فرض $c_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k! f'(\alpha)}$ داریم:

$$f(x_k) = f'(\alpha) \left[e_k + c_r e_k^2 + c_r e_k^3 + c_r e_k^4 + O(e_k^5) \right] \quad (10)$$

$$e_{k,w} = e_k + \gamma f(e_k) = e_k + \gamma f'(\alpha) e_k (1 + c_r e_k + c_r e_k^r + c_r e_k^r) + O(e_k^r) \quad (11)$$

از رابطه‌ی (۱۰) و رابطه‌ی (۱۱) نتیجه می‌شود:

$$f(e_{k,w}) = f'(\alpha)(e_k + f'(\alpha)\gamma(e_k + e_k^r c_r + e_k^r c_r + e_k^r c_r) + c_r(e_k + f'(\alpha)\gamma(e_k + e_k^r c_r + e_k^r c_r + e_k^r c_r)))^r + c_r(e_k + f'(\alpha)\gamma(e_k + e_k^r c_r + e_k^r c_r + e_k^r c_r))^r + c_r(e_k + f'(\alpha)\gamma(e_k + e_k^r c_r + e_k^r c_r + e_k^r c_r))^r \quad (12)$$

از این رو می‌توان $f[X_k, W_k]$ را با استفاده از روابط (۱۰) و (۱۲) به صورت زیر نتیجه گرفت:

$$f[X_k, W_k] = -\frac{1}{e_k f'(\alpha)\gamma(1 + e_k c_r + e_k^r c_r + e_k^r c_r)}(e_k f'(\alpha)(1 + e_k c_r + e_k^r c_r + e_k^r c_r) + f'(\alpha)(e_k + e_k f'(\alpha)\gamma(1 + e_k c_r + e_k^r c_r + e_k^r c_r) + c_r(e_k + e_k f'(\alpha)\gamma(1 + e_k c_r + e_k^r c_r + e_k^r c_r)))^r + c_r(e_k + e_k f'(\alpha)\gamma(1 + e_k c_r + e_k^r c_r + e_k^r c_r))^r + c_r(e_k + e_k f'(\alpha)\gamma(1 + e_k c_r + e_k^r c_r + e_k^r c_r))^r) \quad (13)$$

اکنون با تقسیم رابطه (۱۰) بر رابطه (۱۳) و همچنین معادله خطای نتیجه می‌شود:

$$e_{k,y} = (1 + f'(\alpha)\gamma)c_r e_k^r + \left(-\left(2 + 2f'(\alpha)\lambda + f'(\alpha)^r \gamma^r\right)c_r^r + \left(2 + 3f'(\alpha)\gamma + f'(\alpha)^r \gamma^r\right)c_r\right)e_k^r + \left(\left(4 + 5f'(\alpha)\gamma + 3f'(\alpha)^r \gamma^r + f'(\alpha)^r \gamma^r\right)c_r^r - \left(7 + 10f'(\alpha)\gamma + 7f'(\alpha)^r \gamma^r + 2f'(\alpha)^r \gamma^r\right)c_r c_r + \left(3 + 6f'(\alpha)\gamma + 4f'(\alpha)^r \gamma^r + f'(\alpha)^r \gamma^r\right)c_r\right)e_k^r + O(e_k^r) \quad (14)$$

از رابطه (۱۴) می‌توان $f(y_k)$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$f(y_k) = f'(\alpha)(1 + f'(\alpha)\gamma)c_r e_k^r + f'(\alpha)\left(-2c_r^r - 2f'(\alpha)\gamma c_r^r + f'(\alpha)^r \gamma^r c_r^r + 2c_r + 3f'(\alpha)\gamma c_r + f'(\alpha)^r \gamma^r c_r\right)e_k^r + f'(\alpha)\left(4c_r^r + 5f'(\alpha)\gamma c_r^r + 3c_r^r + f'(\alpha)^r \gamma^r c_r^r + c_r(c_r + f'(\alpha)\gamma c_r)\right) - 7c_r c_r - 10f'(\alpha)\gamma c_r c_r - 7f'(\alpha)^r \gamma^r c_r c_r - 2f'(\alpha)^r \gamma^r c_r c_r + 3c_r + 6f'(\alpha)\gamma c_r + 4f'(\alpha)^r \gamma^r c_r + f'(\alpha)^r \gamma^r c_r)e_k^r + O(e_k^r) \quad (15)$$

از روابط (۱۰)، (۱۱)، (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) می‌توان نتایج زیر را به دست آورد:

$$e_{k,y} = (1 + f'(\alpha)\gamma)c_r e_k^r + \left(-\left(2 + 2f'(\alpha)\lambda + f'(\alpha)^r \gamma^r\right)c_r^r + \left(2 + 3f'(\alpha)\gamma + f'(\alpha)^r \gamma^r\right)c_r\right)e_k^r + \left(\left(4 + 5f'(\alpha)\gamma + 3f'(\alpha)^r \gamma^r + f'(\alpha)^r \gamma^r\right)c_r^r - \left(7 + 10f'(\alpha)\gamma + 7f'(\alpha)^r \gamma^r + 2f'(\alpha)^r \gamma^r\right)c_r c_r + \left(3 + 6f'(\alpha)\gamma + 4f'(\alpha)^r \gamma^r + f'(\alpha)^r \gamma^r\right)c_r\right)e_k^r + O(e_k^r) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} f[y_k, w_k] = & f'(\alpha) + (1 + f'(\alpha)\gamma)c_\tau e_k + f'(\alpha)((1 + 2f'(\alpha)\gamma)c_\tau^\tau + (1 + f'(\alpha)\gamma)^\tau c_\tau) e_k^\tau + \\ & f'(\alpha)((- (2 + f'(\alpha)\gamma(2 + f'(\alpha)\gamma))c_\tau^\tau + (1 + 2f'(\alpha)\gamma)(3 + 2f'(\alpha)\gamma)c_\tau c_\tau + (1 + f'(\alpha)\gamma)^\tau c_\tau) e_k^\tau + \\ & f'(\alpha)((4 + f'(\alpha)\gamma(5 + f'(\alpha)\gamma(3 + f'(\alpha)\gamma)))c_\tau^\tau - (1 + f'(\alpha)\gamma)(1 + f'(\alpha)\gamma(2 + 3f'(\alpha)\gamma))c_\tau^\tau c_\tau + \\ & (1 + f'(\alpha)\gamma)(2 + f'(\alpha)\gamma)(5 + f'(\alpha)\gamma)c_\tau^\tau + (4 + f'(\alpha)\gamma(13 + f'(\alpha)\gamma))c_\tau c_\tau + (1 + f'(\alpha)\gamma)^\tau c_\tau) e_k^\tau + O(e_k^\delta) \end{aligned} \quad (17)$$

در نهایت با استفاده از روابط (۱۰) الی (۱۷) خواهیم داشت:

$$e_{n+1} = (1 + \gamma f'(\alpha))c_\tau((2 + \gamma f'(\alpha))c_\tau^\tau - (1 + \gamma f'(\alpha))c_\tau e_n^\tau) + O(e_n^\delta).$$

□

و به این ترتیب اثبات قضیه به پایان می‌رسد.

روش لیو و همکاران را می‌توان با ورود دو پارامتر خودشتابگر به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k] + \beta f(w_k)}, w_k = x_k + \gamma f(x_k), \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]^\tau} f(y_k), k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (18)$$

قضیه ۲-۲ معادله خطای روش بهین دو گامی بدون حافظه (۱۸) را نشان می‌دهد.

قضیه ۲-۳

فرض کنید $\alpha \in I$ ریشه ساده تابع به اندازه کافی دیفرانسیل پذیر $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ روی بازه‌ی باز I باشد. اگر x_k به اندازه کافی به ریشه α نزدیک باشد، آنگاه روش (۱۰) دارای حداقل مرتبه همگرایی ۴ بوده و در معادله خطای زیر صدق می‌کند:

$$e_{n+1} = (1 + \gamma f'(\alpha))(\beta + c_\tau)(\beta(1 + \gamma f'(\alpha))c_\tau + (2 + \gamma f'(\alpha))c_\tau^\tau - (1 + \gamma f'(\alpha))c_\tau e_n^\tau) + O(e_n^\delta) \quad (19)$$

اثبات: روش اثبات مشابه قضیه قبل می‌باشد. با استفاده از برنامه زیر که با استفاده از نرم افزار Mathematica نوشته شده است، قضیه اثبات می‌شود:

$$\begin{aligned} & \text{Clear["Global' *"]} \\ & f[e_]= fla*(e+c_\tau e_n^\tau+c_\tau e_n^\tau+c_\tau e_n^\tau); \\ & ew=e+\gamma[f[e],\{e,^\tau,^\tau\}]; \\ & ey=e-\text{Series}[\frac{f[e]}{f[e,ew]+\beta f[ew]},\{e,^\tau,^\tau\}]; \\ & e1=ey-\text{Series}[\frac{(f[e,ey]-f[ey,ew]+f[e,ew])}{f[e,ey]^\tau}f[ey],\{e,^\tau,^\tau\}]/\text{FullSimplify} \end{aligned}$$

خروجی این برنامه به صورت زیر است:

$$e_{n+1} = (1 + \gamma f'(\alpha))(\beta + c_r)(\beta(1 + \gamma f'(\alpha))c_r + (\gamma + \gamma f'(\alpha))c_r^2 - (1 + \gamma f'(\alpha))c_r e_n^* + O(e_n^{\delta}))$$

و به این ترتیب اثبات این قضیه نیز به پایان می‌رسد. □

در ادامه این مقاله در بخش سوم روش‌های با حافظه را مورد بررسی قرار خواهیم داد. لازم به ذکر است روش‌های با حافظه را با همان تعداد ارزیابی روش‌های بدون حافظه، با ورود پارامترهای خود شتابگر و نیز تقریب آنها با استفاده از اطلاعات قبل خواهیم ساخت که مرتبه همگرایی و نیز به تبع آن شاخص کارایی بالاتری دارند.

۴ ساختار روش‌های با حافظه جدید

این بخش شامل دوبخش است. ابتدا خانواده روش‌های تک پارامتری مطرح می‌شود، سپس در بخش دوم نیز روش‌های دو پارامتری را برای حل معادلات غیرخطی مطرح خواهیم کرد.

۴-۱ خانواده روش‌های تک پارامتری با حافظه

با ملاحظه رابطه (۹) متوجه خواهیم شد که مرتبه روش داده‌شده (۸)، چهار خواهد بود. اگر

$$(1 + \gamma f'(\alpha)) \neq 0$$

حال اگر داشته باشیم:

$$\gamma = \frac{-1}{f'(\alpha)}$$

آنگاه معادله خطای روش (۸) بیش از چهار خواهد بود از آنجایی که α ، ریشه دقیق معادله، در دسترس نیست پس مقدار γ قابل محاسبه دقیق نخواهد بود. اما به جای آن می‌توان از تقریب $\overline{f'(\alpha)} \approx f'(\alpha)$ استفاده نمود. از این رو ما با استفاده از تقریب زیر

$$\gamma = \frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}}$$

روش‌های با حافظه تک پارامتری و نیز دو پارامتری با مرتبه همگرایی ۴/۲۳۶۱، ۴/۵۶۱۶، ۴/۷۸۹۲ و ۵/۲۳۶۱ خواهیم ساخت.

اگر پارامتر $\gamma = \frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}}$ را به صورت‌های زیر تقریب بزنیم، روش‌های با حافظه با مرتبه‌های همگرایی مختلف را به دست خواهیم آورد:
الف- روش تقریب سکانت:

$$\overline{f'(\alpha)} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}. \quad (20)$$

ب- روش تقریب بهبود یافته سکانت:

$$\overline{f'(\alpha)} = \frac{f(x_k) - f(y_{k-1})}{x_k - y_{k-1}}. \quad (21)$$

ج- روش تقریب نیوتن:

$$\overline{f'(\alpha)} = N'_r(x_k), \quad N_r(t) = N_r(t; x_k, y_{k-1}, x_{k-1}). \quad (22)$$

که $N'_r(x_k)$ چندجمله‌ای درونیاب درجه ۲ نیوتن با استفاده از نقاط x_k, y_{k-1}, x_{k-1} می‌باشد. لازم به ذکر است این نقاط معلوم می‌باشند.

د- روش نیوتن:

$$\overline{f'(\alpha)} = N'_r(x_k), \quad N_r(t) = N_r(t; x_k, y_{k-1}, x_{k-1}, w_{k-1}). \quad (23)$$

چندجمله‌ای درونیاب درجه ۳ نیوتن از بین نقاط معلوم $x_k, y_{k-1}, x_{k-1}, w_{k-1}$ می‌باشد. لازم به ذکر است با این نقاط بهترین چندجمله‌ای تقریب زده خواهد شد.

پس پارامتر شتابگر $\gamma_k = \gamma$ را به صورت‌های زیر می‌توان تعیین نمود:

الف- روش تقریب سکانت:

$$\gamma_k = \frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}} = -\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}. \quad (24)$$

ب- روش تقریب بهبود یافته سکانت:

$$\gamma_k = \frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}} = -\frac{x_k - y_{k-1}}{f(x_k) - f(y_{k-1})}. \quad (25)$$

ج- روش تقریب نیوتن:

$$\gamma_k = \frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}} = \frac{-1}{N'_r(x_k)}. \quad (26)$$

$$N_r(t) = f(x_k) + f[x_k, y_{k-1}](t - x_k) + f[x_k, y_{k-1}, x_{k-1}](t - x_{k-1})(t - y_{k-1})$$

د- روش نیوتن:

$$\gamma_k = \frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}} = \frac{-1}{N'_r(x_k)}. \quad (27)$$

که

$$N_r(t) = f(x_k) + f[x_k, y_{k-1}](t - x_k) + f[x_k, y_{k-1}, w_{k-1}](t - y_{k-1})(t - w_{k-1}) \\ + f[x_k, y_{k-1}, w_{k-1}, x_{k-1}](t - y_{k-1})(t - w_{k-1})(t - x_{k-1}).$$

حال اگر پارامتر خود شتابگر γ_k را با استفاده از یکی از روش‌های فوق تعیین کنیم، روش‌های باحافظه زیر را خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_k = -\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \\ w_k = x_k + \gamma_k f(x_k), y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]^r} f(y_k). \end{array} \right. \quad (28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_k = -\frac{x_k - y_{k-1}}{f(x_k) - f(y_{k-1})}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \\ w_k = x_k + \gamma_k f(x_k), y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]^r} f(y_k). \end{array} \right. \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_k = -\frac{1}{N_r'(x_k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \\ w_k = x_k + \gamma_k f(x_k), y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]^r} f(y_k). \end{array} \right. \quad (30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_k = -\frac{1}{N_r'(x_k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \\ w_k = x_k + \gamma_k f(x_k), y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k]}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]^r} f(y_k). \end{array} \right. \quad (31)$$

قضیه ۴-۱

فرض کنید $\alpha \in I$ ریشه ساده تابع به اندازه کافی دیفرانسیل پذیر $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ روی بازه I باشد. اگر x به اندازه کافی به ریشه α نزدیک باشد، آنگاه مرتبه همگرایی روش‌های (۲۸)، (۲۹)، (۳۰) و (۳۱) به ترتیب برابر است با: $۴/۲۳۶۱$ ، $۴/۵۶۱۶$ ، $۴/۷۹۱۲$ و $۵/۲۳۶۱$.

اثبات مرتبه همگرایی رابطه (۲۸): نشان می‌دهیم مرتبه همگرایی روش تک پارامتری باحافظه (۲۸) حداقل برابر است با:

$$2 + \sqrt{5}$$

با استفاده از بسط مک لورن تابع $f(x)$ حول نقطه $x = \alpha$ خواهیم داشت:

$$f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha)f'(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^2}{2!}f''(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^3}{3!}f'''(\alpha) + \dots \quad (32)$$

حال با استفاده از روابط $e_k = x_k - \alpha, e_{k+1} = x_{k+1} - \alpha$ و نیز رابطه (24) داریم:

$$f(x_k) = f(\alpha) + (x_k - \alpha)f'(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)^2}{2!}f''(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)^3}{3!}f'''(\alpha) + \dots \quad (33)$$

و

$$f(x_{k-1}) = f(\alpha) + (x_{k-1} - \alpha)f'(\alpha) + \frac{(x_{k-1} - \alpha)^2}{2!}f''(\alpha) + \frac{(x_{k-1} - \alpha)^3}{3!}f'''(\alpha) + \dots \quad (34)$$

با استفاده از روابط $e_k = x_k - \alpha, e_{k+1} = x_{k+1} - \alpha$ و نیز رابطه‌های (33) و (34) زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = \frac{(e_k - e_{k-1})f'(\alpha) + \frac{(e_k^2 - e_{k-1}^2)f''(\alpha)}{2!} + \frac{(e_k^3 - e_{k-1}^3)f'''(\alpha)}{3!} + \dots}{e_k - e_{k-1}} \quad (35)$$

$$= f'(\alpha) + \frac{(e_k + e_{k-1})f''(\alpha)}{2!} + \frac{(e_k^2 + e_k e_{k-1} + e_{k-1}^2)f'''(\alpha)}{3!} + \dots$$

و با استفاده از رابطه (24) داریم:

$$\gamma_k = -\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = \frac{-1}{f'(\alpha) + (e_k + e_{k-1})\frac{f''(\alpha)}{2!} + \frac{(e_k^2 + e_k e_{k-1} + e_{k-1}^2)f'''(\alpha)}{3!} + \dots} \quad (36)$$

حال برای محاسبه $(1 + \gamma f'(\alpha))$ با استفاده از رابطه (36) خواهیم داشت:

$$(1 + \gamma_k f'(\alpha)) = 1 - \frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha) + (e_k + e_{k-1})\frac{f''(\alpha)}{2!} + \frac{(e_k^2 + e_k e_{k-1} + e_{k-1}^2)f'''(\alpha)}{3!} + \dots} \quad (37)$$

$$= \frac{(e_k + e_{k-1})c_r + (e_k^2 + e_k e_{k-1} + e_{k-1}^2)c_r + \dots}{1 + (e_k + e_{k-1})c_r + (e_k^2 + e_k e_{k-1} + e_{k-1}^2)c_r + \dots} \sim c_r e_{k-1}$$

از رابطه (37) و نیز معادله خطای آن خواهیم داشت:

$$\begin{cases} e_{k+1} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha))e_k^*, \\ e_{k,y} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha))e_k^r, \\ e_{k,w} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha))e_k. \end{cases} \quad (38)$$

در ادامه فرض کنید دنباله‌های $\{x_k\}$ و $\{w_k\}, \{y_k\}$ همگرا با مرتبه همگرایی r_1, r_r و r باشند، داریم:

$$\begin{cases} e_{k+1} \sim e_k^r \sim e_{k-1}^r, \\ e_{k,y} \sim e_k^{r_y} \sim e_{k-1}^{r_y}, \\ e_{k,w} \sim e_k^{r_1} \sim e_{k-1}^{r_1}. \end{cases} \quad (39)$$

در نهایت با استفاده از جفت روابط (۳۸) و (۳۹) به دستگاه سه معادله و سه مجهول زیر خواهیم رسید:

$$\begin{cases} rr_1 - 1 - r = 0, \\ rr_y - 1 - r = 0, \\ r^2 - 1 - 4r = 0. \end{cases} \quad (40)$$

جواب این دستگاه معادلات عبارتست از:

$$\begin{cases} r_1 = -1 + \sqrt{5} \sim 1/2361, \\ r_y = \sqrt{5} \sim 2/2361, \\ r = 2 + \sqrt{5} \sim 4/2361. \end{cases}$$

اثبات مرتبه همگرایی روش (۲۹): با استفاده از رابطه (۳۲) خواهیم داشت:

$$f(y_{k-1}) = f(\alpha) + (y_{k-1} - \alpha) f'(\alpha) + \frac{(y_{k-1} - \alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \frac{(y_{k-1} - \alpha)^3}{3!} f'''(\alpha) + \dots \quad (41)$$

با استفاده از رابطه $x_k - y_{k-1} = e_k - e_{k-1,y}$ و نیز رابطه های (۳۳) و (۴۱) رابطه زیر نتیجه می شود:

$$\gamma_k = -\frac{x_k - y_{k-1}}{f(x_k) - f(y_{k-1})} = \frac{-1}{f'(\alpha) + (e_k + e_{k-1,y}) \frac{f''(\alpha)}{2!} + \frac{(e_k^r + e_k e_{k-1,y} + e_{k-1,y}^r) f'''(\alpha)}{3!} + \dots} \quad (42)$$

حال برای محاسبه $(1 + \gamma f'(\alpha))$ با استفاده از رابطه (۴۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (1 + \gamma_k f'(\alpha)) &= 1 - \frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha) + (e_k + e_{k-1,y}) \frac{f''(\alpha)}{2!} + \frac{(e_k^r + e_k e_{k-1,y} + e_{k-1,y}^r) f'''(\alpha)}{3!} + \dots} \\ &= \frac{(e_k + e_{k-1,y}) c_r + (e_k^r + e_k e_{k-1,y} + e_{k-1,y}^r) c_r + \dots}{1 + (e_k + e_{k-1,y}) c_r + (e_k^r + e_k e_{k-1,y} + e_{k-1,y}^r) c_r + \dots} \sim c_r e_{k-1,y} \end{aligned} \quad (43)$$

از رابطه (۴۳) و نیز معادله خطای آن خواهیم داشت:

$$\begin{cases} e_{k+1} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha)) e_k^r \\ e_{k,y} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha)) e_k^{r_y} \\ e_{k,w} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha)) e_k \end{cases} \quad (44)$$

در ادامه فرض کنید دنباله های $\{y_k\}$, $\{w_k\}$ و $\{x_k\}$ همگرا با مرتبه همگرایی r_1, r_y و r باشند، داریم:

$$\begin{cases} e_{k+1} \sim e_k^r \sim e_{k-1}^{r^r} \\ e_{k,y} \sim e_k^{r_y} \sim e_{k-1}^{r_y^r} \\ e_{k,w} \sim e_k^{r_1} \sim e_{k-1}^{r_1^r} \end{cases} \quad (45)$$

در نهایت با استفاده از جفت روابط (44) و (45) به دستگاه سه معادله و سه مجهول زیر خواهیم رسید:

$$\begin{cases} rr_1 - r_y - r = 0, \\ rr_y - r_y - 2r = 0, \\ r^r - r_y - 4r = 0. \end{cases} \quad (46)$$

جواب این دستگاه معادلات عبارتست از:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1}{4} (9 - \sqrt{17}) \cong 1/2192, \\ r_y = \frac{1}{4} (5 + \sqrt{17}) \cong 2/5616, \\ r = \frac{1}{4} (5 + \sqrt{17}) \cong 4/5616. \end{cases}$$

اثبات همگرایی روش (30): کاملاً مشابه روش (29) است.

اثبات همگرایی روش (31):

با استفاده از برنامه کاربردی زیر در نرم افزار Mathematica

```
ClearAll["Global'*"]
A[t_]:=InterpolatingPolynomial[{{e,fx},{ew,fw},{ey,fy},{e1,fx1}},t]
Approximation=-1/A'[e1]//Simplify;
fx=fla*(e+c2*e^2+c3*e^3+c4*e^4);
fw=fla*(ew+c2*ew^2+c3*ew^3+c4*ew^4);
fy=fla*(ey+c2*ey^2+c3*ey^3+c4*ey^4);
fx1=fla*(e1+c2*e1^2+c3*e1^3+c4*e1^4);
γ=Series[Approximation,{e,0,2},{ew,0,2},{ey,0,2},{e1,0,0}]/Simplify;
Collect[Series[+1+γ*fla,{e,0,1},{ew,0,1},{ey,0,1},{e1,0,0}],{e,ew,ey,e1},Simplify]
```

خروجی این برنامه به صورت زیر است.

$$c_{\gamma} e e w e y$$

از این خروجی برای محاسبه $(1 + \gamma f'(\alpha))$ و استفاده از رابطه (27) خواهیم داشت:

$$(1 + \gamma_k f'(\alpha)) \sim c_{\gamma} e_{k-1} e_{k-1,w} e_{k-1,y}. \quad (47)$$

از رابطه (47) و نیز معادله خطای آن خواهیم داشت:

$$\begin{cases} e_{k+1} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha)) e_k^r, \\ e_{k,y} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha)) e_k^y, \\ e_{k,w} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha)) e_k. \end{cases} \quad (48)$$

در ادامه فرض کنید دنباله‌های $\{y_k\}$ ، $\{w_k\}$ و $\{x_k\}$ همگرا با مرتبه همگرایی r_1, r_2, r باشند، داریم:

$$\begin{cases} e_{k+1} \sim e_k^{r_1} \sim e_{k-1}^{r_1}, \\ e_{k,y} \sim e_k^{r_2} \sim e_{k-1}^{r_2}, \\ e_{k,w} \sim e_k^r \sim e_{k-1}^r. \end{cases} \quad (49)$$

در نهایت با استفاده از جفت روابط (۴۸) و (۴۹) مساوی قرار دادن توان‌های $e_{k,w}, e_{k,y}$ و e_{k+1} به دستگاه سه معادله و سه مجهول زیر خواهیم رسید:

$$\begin{cases} rr_1 - 1 - r_1 - r_2 - r = 0, \\ rr_2 - 1 - r_1 - r_2 - 2r = 0, \\ r^2 - 1 - r_1 - r_2 - 4r = 0. \end{cases} \quad (50)$$

جواب این دستگاه معادلات عبارتست از:

$$\begin{cases} r_1 = 1 + \sqrt{5} \cong 2/2361, \\ r_2 = \sqrt{5} \cong 3/2361, \\ r = 3 + \sqrt{5} \cong 5/2361. \end{cases}$$

و به این ترتیب اثبات قضیه به پایان می‌رسد. □

اکنون می‌توانیم گزاره‌های زیر را بیان کنیم.

گزاره ۴-۱

مرتبه‌ی همگرایی روش‌های با حافظه (۲۸)، (۲۹)، (۳۰) و (۳۱) به ترتیب برابر است با: ۴/۷۹۱۲، ۴/۵۶۱۶، ۴/۲۳۶۱ و ۵/۲۳۶۱. از این رو شاخص کارایی آنها به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{4/2361} = 1/6181, \\ \sqrt[3]{4/5616} = 1/6585, \\ \sqrt[3]{4/7912} = 1/6858, \\ \sqrt[3]{5/2361} = 1/7365. \end{cases}$$

گزاره ۴-۲

هریک از روش‌های با حافظه (۲۸)، (۲۹)، (۳۰) و (۳۱) که به ترتیب ۰/۲۳۶۱، ۰/۵۶۱۶، ۰/۷۹۱۲ و ۱/۲۳۶۱ بهبود مرتبه همگرایی روش بدون حافظه (۸) را داشته‌اند، میزان بهبود همگرایی به ترتیب زیر دارند: ۵/۹۱٪، ۱۴/۰۴٪، ۱۹/۷۸٪ و ۳۰/۹۰٪.

۴-۲ روش‌های باحافظه دو پارامتری

حال برای ساخت روش دوگامی باحافظه دو پارامتری جدید به صورت زیر عمل خواهیم نمود. با ملاحظه رابطه (۱۹) متوجه خواهیم شد که مرتبه روش داده شده (۱۸)، چهار خواهد بود، اگر

$$(1 + \gamma f'(\alpha)) \neq 0, \quad (\beta + c_r) \neq 0.$$

از این رو اگر داشته باشیم:

$$\gamma = \frac{-1}{f'(\alpha)}, \quad \beta = -c_r = \frac{-f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

آنگاه معادله خطای روش (۱۸) بیش از چهار خواهد بود. از آنجایی که α ، ریشه‌ی دقیق معادله در دسترس نیست، پس مقدار β ، γ قابل محاسبه دقیق نخواهند بود. اما به جای آن می‌توان از تقریب‌های زیر

$$f'(\alpha) \approx \overline{f'(\alpha)}, \quad f''(\alpha) \approx \overline{f''(\alpha)}.$$

استفاده نمود. از این رو می‌توان تقریب‌های زیر

$$\gamma = \frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}}, \quad \beta = \frac{-\overline{f''(\alpha)}}{2\overline{f'(\alpha)}}.$$

را نظر گرفت. در ادامه این بخش روش‌های باحافظه دو پارامتری با مرتبه همگرایی ۶/۳۷ ساخته می‌شود.

$$\text{اگر پارامترهای } \gamma_k = \frac{-1}{f'(\alpha)}, \quad \beta_k = \frac{-\overline{f''(\alpha)}}{2\overline{f'(\alpha)}} \text{ که}$$

$$\overline{f'(\alpha)} = N'_r(x_k), \quad N_r(t; x_k, y_{k-1}, x_{k-1}, w_{k-1}). \quad (51)$$

$$\overline{f''(\alpha)} = N'_f(x_k), \quad N_f(t; w_k, x_k, y_{k-1}, x_{k-1}, w_{k-1}). \quad (52)$$

پس پارامترهای $\gamma_k = \gamma$ ، $\beta_k = \beta$ را به صورت بازگشتی زیر می‌توان تعیین نمود:

$$\gamma_k = \frac{-1}{\overline{f'(\alpha)}} = \frac{-1}{N'_r(x_k)}, \quad \beta_k = \frac{-\overline{f''(\alpha)}}{2\overline{f'(\alpha)}} = \frac{-N'_f(w_k)}{2N'_f(w_k)}. \quad (53)$$

در حالی که

$$\begin{aligned} N_f(t) = & f(x_k) + f[x_k, y_{k-1}](t - x_k) + f[x_k, y_{k-1}, w_{k-1}](t - y_{k-1})(t - w_{k-1}) \\ & + f[x_k, y_{k-1}, w_{k-1}, x_{k-1}](t - y_{k-1})(t - w_{k-1})(t - x_{k-1}) \\ & + f[w_k, x_k, y_{k-1}, w_{k-1}, x_{k-1}](t - x_k)(t - y_{k-1})(t - w_{k-1})(t - x_{k-1}). \end{aligned}$$

و با تعیین پارامترهای γ_k ، β_k با استفاده از روش فوق، روش‌های باحافظه زیر را خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_k = \frac{-1}{N'_r(x_k)}, \beta_k = \frac{-N''_r(w_k)}{2N'_r(w_k)} \quad k=1,2,3,\dots, \\ w_k = x_k + \gamma_k f(x_k), y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f[x_k, w_k] + \beta_k f(x_k)}, \quad k=0,1,2,\dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f[x_k, y_k] - f[y_k, w_k] + f[x_k, w_k]}{f[x_k, y_k]^r} f(y_k). \end{array} \right. \quad (54)$$

قضیه ۲-۴

فرض کنید $\alpha \in I$ ریشه ساده تابع به اندازه کافی دیفرانسیل پذیر $f: I \subseteq R \rightarrow R$ روی بازه I باشد. اگر x به اندازه کافی به ریشه α نزدیک باشد، آنگاه مرتبه همگرایی روش (۵۴) برابر است با ۶/۳۷.

اثبات: مشابه قضیه قبل داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \gamma_k f'(\alpha)) \sim c_r e_{k-1} e_{k-1, w} e_{k-1, y}, \\ (\beta_k + c_r) \sim c_r e_{k-1} e_{k-1, w} e_{k-1, y}. \end{array} \right. \quad (55)$$

از رابطه (۵۵) و نیز معادله خطای آن خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{k+1} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha)) e_k^r \sim e_{k-1} e_{k-1, w} e_{k-1, y} e_k^r, \\ e_{k, y} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha)) e_k^r \sim e_{k-1} e_{k-1, w} e_{k-1, y} e_k^r, \\ e_{k, w} \sim (1 + \gamma_k f'(\alpha)) e_k \sim e_{k-1} e_{k-1, w} e_{k-1, y} e_k. \end{array} \right. \quad (56)$$

با فرض این که دنباله های $\{x_k\}$ و $\{w_k\}, \{y_k\}$ همگرا با مرتبه همگرایی r_1, r_r و r باشند، داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{k+1} \sim e_k^{r_1} \sim e_{k-1}^{r_1}, \\ e_{k, y} \sim e_k^{r_r} \sim e_{k-1}^{r_r}, \\ e_{k, w} \sim e_k^{r_1} \sim e_{k-1}^{r_1}. \end{array} \right. \quad (57)$$

با استفاده از جفت روابط (۵۶) و (۵۷) و مساوی قرار دادن توان های $e_{k, w}, e_{k, y}$ و e_{k+1} به دستگاه سه معادله و سه مجهول زیر خواهیم رسید:

$$\left\{ \begin{array}{l} rr_1 - 1 - r_1 - r_r - r = 0, \\ rr_r - 2 - 2r_1 - 2r_r - 2r = 0, \\ r^2 - 2 - 2r_1 - 2r_r - 4r = 0. \end{array} \right. \quad (58)$$

که جواب این دستگاه معادلات عبارتست از:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1}{4}(3 + \sqrt{33}) \sim 2/1861, \\ r_2 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{33}) \sim 4/3723, \\ r = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{33}) \sim 6/3723. \end{cases}$$

و به این ترتیب اثبات قضیه به پایان می‌رسد. □

گزاره ۴-۳

شاخص کارایی روش باحافظه (۵۴) برابر است با $\sqrt[3]{6/3723} = 1/8540$. از آنجاکه این روش مرتبه همگرایی را از ۴ به ۶/۳۷۲۳ رسانده است، پس میزان بهبود مرتبه همگرایی آن، ۵۹/۳۷٪ می‌باشد. مطالعه بیشتر روش‌های باحافظه چندگامی را در مراجع ذکر شده زیر می‌توانید مشاهده نمایید. نتا^۱ [۱۵]، لاله چینی و همکاران [۱۶]، ترکاشوند و همکاران [۱۸ و ۱۷]، پتکویچ^۲ و همکاران [۲۰، ۱۹]، ونگ^۳ [۲۱]، سلیمانی و همکاران [۲۲] و کوردرو و همکاران [۲۳] و علاوه بر این عهدهی اقدم و همکارانش رضاپور و قوسی نیز روش‌های بدون حافظه را در مراجع [۲۹، ۳۰] مطالعه نمودند.

ترکاشوند و همکاران کاربردی از این روش‌ها را در تعیین مقادیر ویژه ماتریس‌ها به کار برده‌اند [۳۱]. علاوه بر این، ترکاشوند و همکاران، دینامیک روش‌های تکراری و همگرایی موضعی و نیمه‌موضعی آنها را مورد بررسی قرار داده‌اند. [۳۲، ۳۳] دربخش بعدی مقایسه بهبود مرتبه همگرایی و نیز شاخص کارایی روش‌های جدید را با دیگر روش‌های با حافظه و بدون حافظه خواهیم دید.

۵ مثال‌های عددی

در جدول ۱ پنج معادله غیرخطی همراه ریشه‌ی دقیق و حدس اولیه ریشه را مشاهده می‌نمایید. در جدول ۲، میزان بهبود همگرایی، روش‌های جدید با دیگر روش‌های با حافظه مقایسه شده است. در جدول‌های ۳ تا ۷ مقدار خطای مرتبه اول تا سوم و نیز مرتبه همگرایی و شاخص کارایی روش‌های مختلف مقایسه شده‌اند. جدول ۸ نیز شاخص کارایی و مرتبه همگرایی روش‌های با حافظه و بدون حافظه را نشان می‌دهد. حدس اولیه‌ی ریشه هر معادله در همگرایی روش عددی مطرح شده نقشی اساسی دارد. برای مطالع بیشتر حدس اولیه به مرجع [۲۸] مراجعه شود. تمامی محاسبات با استفاده از نرم افزار Mathematica با دقت 10^{-10} انجام شده است. عبارات زیر در تمامی جدول‌ها استفاده شده است:

¹ B. Netta
² M.S. Petkovic
³ X.Wang

الف- مقدار حدس ریشه اولیه معادله غیرخطی $f(x)=0$.

ب- ریشه دقیق معادله غیرخطی $f(x)=0$.

پ- عبارت $|X_n - \alpha|$ نشان‌دهنده مقدار خطای مرحله n ام از ریشه معادله.

ت- عبارت $m(-n)$ نشان‌دهنده $m \times 10^{-n}$ می‌باشد.

ث- شاخص کارایی فرمول استروفسکی $IE = r^{\frac{1}{\theta_f}}$ استفاده شده که θ_f تعداد ارزیابی از تابع و یا مشتق‌های آن و r مرتبه‌ی همگرایی روش تکراری داده شده است.

$$r_c = \frac{\log \left(\left| \frac{f(x_{k+1})}{f(x_k)} \right| \right)}{\log \left(\left| \frac{f(x_k)}{f(x_{k-1})} \right| \right)}$$

ج- مرتبه همگرایی محاسباتی:

جدول ۱. مثال‌های عددی بررسی شده

تابع بررسی شده	ریشه معادله	حدس اولیه
$f_1(x) = x \log(1 + x \sin x) + e^{-1+x^2+x \cos x} \sin \pi x$	$\alpha = 0$	$x_0 = 0/6$
$f_2(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - x^2$	$\alpha = 1$	$x_0 = 1/4$
$f_3(x) = (x-2)(x^2+x+2)e^{-5x}$	$\alpha = 2$	$x_0 = 2/2$
$f_4(x) = e^{x^2-x} - \cos(x^2-1) + x^2 + 1$	$\alpha = -1$	$x_0 = -1/4$
$f_5(x) = \log(1+x^2) + e^{-2x+x^2} \sin x$	$\alpha = 0$	$x_0 = 0/6$

جدول ۲. مقایسه درصد بهبود مرتبه همگرایی روش جدید با دیگر روش‌های باحافظه

نام روش با حافظه	تعداد گام	تعداد ارزیابی	مرتبه روش بدون حافظه بهین	مرتبه همگرایی	درصد بهبود مرتبه همگرایی
Petkovic et al (۲۰۱۰) [۲۰]	۲	۳	۴	۴/۲۳۶۱	٪ ۵/۹
Petkovic et al (۲۰۱۰) [۲۰]	۲	۳	۴	۴/۴۴۹۵	٪ ۱۱/۲۴
Soleymani et al (۲۰۱۵) [۲۲]	۳	۴	۸	۱۲	٪ ۵۰
Dzunic-Petkovic (۲۰۱۲) [۲۶]	۱	۲	۲	۳	٪ ۵۰
Traub (۱۹۶۴) [۲۵]	۱	۲	۲	۲/۴۵۷۱	٪ ۲۰/۵
Lalehchini et al (۲۰۲۰) [۱۶]	۲	۳	۴	۶	٪ ۵۰
Sharifi et al (۲۰۱۶) [۲۸]	۳	۴	۸	۱۲	٪ ۵۰
Wang (۲۰۱۸) [۲۱]	۲	۳	۴	۴/۴۴۹۵	٪ ۱۱/۲۴
Wang (۲۰۱۸) [۲۱]	۲	۳	۴	۴/۲۳۶۱	٪ ۵/۹
روش (۲۸)	۲	۳	۴	۴/۲۳۶۱	٪ ۵/۹
روش (۲۹)	۳	۴	۴	۴/۵۶۱۶	٪ ۱۴/۰۴

روش (۳۰)	۲	۳	۴	۴/۷۹۱۲	٪ ۱۹/۷۸
روش (۳۱)	۲	۳	۴	۵/۲۳۶۱	٪ ۳۰/۹۰
روش (۵۴)	۲	۳	۴	۶/۳۷۲۳	٪ ۵۹/۳۱

جدول ۳. مقایسه خطای مطلق، شاخص کارایی و مرتبه همگرایی محاسباتی روش های جدید با دیگر روش ها

$f_1(x) = x \log(1 + x \sin x) + e^{-1+x^2+x \cos x} \sin \pi x$					
روش های بررسی شده	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	r_c	IE
Newton [۱]	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۱۵۹۱۰(۰)	۰/۲۴۴۷۶(-۱)	۲/۰۰۰۱	۱/۴۱۴۳
Steffensen [۱]	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۸۶۲۹۶(۰)	۰/۱۳۷۶۸(۱)	۲	۱/۴۱۴۲
Hally	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۳۳۶۳۷(۰)	۰/۴۰۰۷۲(-۱)	۳	۱/۴۴۲۳
Chebyshev	۰/۶۰۰۰۰(۱)	۰/۱۲۶۷۶(۱)	۰/۱۱۲۸۲(۱)	۳	۱/۴۴۲۳
Abbasbandy [۲۴]	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۴۴۳۷۷(۰)	۰/۱۰۰۲۸(-۲)	۳	۱/۴۴۲۳
Secant, $x_2 = ۰/۳, x_1 = ۰/۶$	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۴۴۲۶۴(-۱)	۰/۱۲۷۸۹(-۱)	۱/۶۱۸۰	۱/۶۱۸۰
Traub (۱۹۶۴), $\gamma_2 = ۰/۱$ [۲۵]	۰/۴۷۸۱۱(۰)	۰/۵۶۲۳۰(-۱)	۰/۱۲۶۰۲(-۲)	۲/۴۸۲۵	۱/۵۷۵۶
$\gamma_2 = ۰/۱$, روش (۲۸)	۰/۲۵۱۲۶(۰)	۰/۱۱۲۷۶(-۲)	۰/۳۶۸۱۲(-۱۲)	۴/۲۳۵۷	۱/۶۱۸۰
$\gamma_2 = ۰/۱$, روش (۲۹)	۰/۲۵۱۲۶(۰)	۰/۱۰۶۶۷(-۲)	۰/۲۲۹۷۸(-۱۳)	۴/۵۶۱۲	۱/۶۵۸۴
$\gamma_2 = ۰/۱$, روش (۳۰)	۰/۲۵۱۲۶(۰)	۰/۱۰۶۶۷(-۲)	۰/۲۲۹۷۸(-۱۳)	۴/۷۹۱۵	۱/۶۸۵۹
$\gamma_2 = ۰/۱$, روش (۳۱)	۰/۲۵۱۲۶(۰)	۰/۴۷۸۳۷(-۳)	۰/۲۳۱۳۰(-۱۶)	۵/۲۳۶۱	۱/۷۳۶۵
$\gamma_2 = ۰/۱$, روش (۵۴)	۰/۱۹۹۷۰(۰)	۰/۴۱۹۱۳(-۴)	۰/۴۴۹۶۹(-۲۶)	۶/۳۷۲۳	۱/۸۵۴۰

جدول ۴. مقایسه خطای مطلق، شاخص کارایی و مرتبه همگرایی محاسباتی روش های جدید با دیگر روش ها

$f_2(x) = 1 + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x} - x^2$					
روش های بررسی شده	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	r_c	IE
Newton [۱]	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۶۶۱۱۶(-۱)	۰/۷۵۹۰۸(-۲)	۲	۱/۴۱۴۲
Steffensen [۱]	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۱	۱
Abbasbandy [۲۴]	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۶۹۱۱۷(-۱)	۰/۸۴۲۸۲(-۳)	۳	۱/۴۴۲۳
Liu et al [۷]	۰/۸۷۵۳۹(-۱)	۰/۱۲۶۷۶(-۲)	۰/۱۱۲۸۲(-۹)	۴	۱/۵۸۷۴
Traub (۱۹۶۴), $\gamma_2 = ۰/۱$ [۲۵]	۰/۶۰۸۰۱(-۱)	۰/۲۸۰۹۴(-۲)	۰/۱۲۷۷۱(-۵)	۲/۴۰۴۸	۱/۵۵۰۷
$\gamma_2 = ۰/۱$, روش (۲۸)	۰/۳۳۸۹۶(-۲)	۰/۲۶۶۰۱(-۹)	۰/۱۱۱۲۳(-۳۹)	۴/۲۳۶۲	۱/۶۱۸۱
$\gamma_2 = ۰/۱$, روش (۲۹)	۰/۳۳۸۹۶(-۲)	۰/۱۰۶۶۷(-۱۰)	۰/۲۲۹۷۴(-۳۶)	۴/۵۶۱۸	۱/۶۵۸۱
$\gamma_2 = ۰/۱$, روش (۳۰)	۰/۳۳۸۹۶(-۲)	۰/۲۷۸۸۹(-۱۰)	۰/۳۱۱۷۲(-۲۹)	۴/۷۹۱۵	۱/۶۸۵۹
$\gamma_2 = ۰/۱$, روش (۳۱)	۰/۳۳۸۹۶(-۲)	۰/۷۸۶۲۹(-۱۱)	۰/۲۰۱۸۳(-۵۴)	۵/۲۳۶۱	۱/۷۳۶۵
$\gamma_2 = ۰/۱$, روش (۵۴)	۰/۳۴۷۰۸(-۲)	۰/۱۳۱۹۶(-۱۲)	۰/۸۲۶۱۵(-۷۶)	۶/۳۷۲۳	۱/۸۵۴۰

جدول ۵. مقایسه خطای مطلق، شاخص کارایی و مرتبه همگرایی محاسباتی روش‌های جدید با دیگر روش‌ها

$f_r(x) = (x-r)(x^{10} + x + r)e^{-\Delta x}$					
روش‌های بررسی‌شده	$ x_1 - \alpha $	$ x_r - \alpha $	$ x_r - \alpha $	r_c	IE
Newton [۱]	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۲۰۳۳۰(-۱)	۰/۱۲۷۲۶(-۴)	۲	۱/۴۱۴۲
Steffensen [۱]	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۲۱۷۴۱(-۱)	۰/۱۷۵۵۸(-۴)	۲	۱/۴۱۴۲
Hally	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۹۴۳۲۷(-۲)	۰/۱۰۰۱۷(-۵)	۳	۱/۴۴۲۳
Chebyshev	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۱۴۰۸۱(-۱)	۰/۳۳۳۵۰(-۵)	۳	۱/۴۴۲۳
Abbasbandy [۲۴]	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۱۷۳۹۱(۰)	۰/۱۲۲۳۱(-۲)	۳	۱/۴۴۲۳
Secant, $x_2 = 2/2, x_1 = 1/8$	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۲۲۹۹۶(-۳)	۰/۱۱۰۳۲(-۴)	۱/۶۱۸۰	۱/۶۱۸۰
Traub (۱۹۶۴), $\gamma_r = 0/1$ [۲۵]	۰/۲۰۴۶۸(-۱)	۰/۹۷۵۳۱(-۷)	۰/۲۲۴۸۲(-۱۹)	۲/۴۸۲۵	۱/۵۷۵۶
Liu et al [۷]	۰/۱۲۵۷۷(-۲)	۰/۵۰۷۲۶(-۱۳)	۰/۱۶۱۱۵(-۵۴)	۴	۱/۵۸۷۴
$\gamma_r = 0/1$, روش (۲۸)	۰/۱۱۳۸۲(-۲)	۰/۸۶۹۶۸(-۱۶)	۰/۳۶۸۱۲(-۷۴)	۴/۲۳۶۶	۱/۶۱۸۱
$\gamma_r = 0/1$, روش (۲۹)	۰/۱۱۳۸۲(-۲)	۰/۴۷۲۸۳(-۲۱)	۰/۲۰۱۹۷(-۱۰۳)	۴/۵۶۱۴	۱/۶۵۸۴
$\gamma_r = 0/1$, روش (۳۰)	۰/۱۱۳۸۲(-۲)	۰/۶۱۷۸۸(-۱۸)	۰/۱۲۱۵۹(-۹۰)	۴/۷۹۰۵	۱/۶۸۵۸
$\gamma_r = 0/1$, روش (۳۱)	۰/۱۱۳۸۲(-۲)	۰/۲۴۹۸۱(-۲۰)	۰/۴۱۳۳۰(-۱۰۸)	۵/۲۳۶۱	۱/۷۳۶۵
$\gamma_r = 0/1$, روش (۵۴)	۰/۸۱۱۶۳(-۳)	۰/۱۷۳۷۴(-۲۲)	۰/۵۱۳۲۲(-۱۳۹)	۶/۳۷۲۳	۱/۸۵۴۰

جدول ۶. مقایسه خطای مطلق، شاخص کارایی و مرتبه همگرایی محاسباتی روش‌های جدید با دیگر روش‌ها

$f_r(x) = e^{x^r - x} - \cos(x^r - 1) + x^r + 1$					
روش‌های بررسی‌شده	$ x_1 - \alpha $	$ x_r - \alpha $	$ x_r - \alpha $	r_c	IE
Newton [۱]	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۲۳۲۸۳(-۱)	۰/۲۴۵۱۳(-۳)	۲	۱/۴۱۴۲
Steffensen [۱]	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۲۸۹۲۷(۰)	۰/۱۷۶۹۸(۰)	۲	۱/۴۱۴۲
Hally	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۶۷۷۳۷(-۲)	۰/۳۳۵۹۵(-۶)	۳	۱/۴۴۲۳
Chebyshev	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۹۰۷۱۱(-۲)	۰/۹۰۶۲۱(-۶)	۳	۱/۴۴۲۳
Abbasbandy [۲۴]	۰/۴۰۰۰۰(۰)	۰/۱۱۸۹۰(-۱)	۰/۱۹۰۱۵(-۵)	۳	۱/۴۴۲۳
Secant, $x_2 = -1/4, x_1 = -1/6$	۰/۲۰۰۰۰(۰)	۰/۲۵۰۹۱(-۱)	۰/۴۴۸۱۹(-۳)	۱/۶۱۸۰	۱/۶۱۸۰
Traub (۱۹۶۴), $\gamma_r = 0/1$ [۲۵]	۰/۲۴۵۹۲(-۱)	۰/۹۲۱۵۹(-۵)	۰/۳۵۶۹۵(-۱۲)	۲/۴۸۲۵	۱/۵۷۵۶
Liu et al [۷]	۰/۸۹۴۸۵(-۱)	۰/۵۳۰۰۵(-۲)	۰/۱۱۲۱۸(-۷)	۴	۱/۵۸۷۴
$\gamma_r = 0/1$, روش (۲۸)	۰/۱۷۶۷۶(-۲)	۰/۲۱۲۵۱(-۱۳)	۰/۹۲۲۸۷(-۵۹)	۴/۲۳۵۸	۱/۶۱۸۰
$\gamma_r = 0/1$, روش (۲۹)	۰/۱۷۶۷۶(-۲)	۰/۶۲۱۱۶(-۱۴)	۰/۵۰۵۱۹(-۶۶)	۴/۵۶۱۴	۱/۶۵۸۴
$\gamma_r = 0/1$, روش (۳۰)	۰/۱۷۶۷۶(-۲)	۰/۵۰۱۹۳(-۱۴)	۰/۷۰۶۲۹(-۶۹)	۴/۷۹۰۵	۱/۶۸۵۸
$\gamma_r = 0/1$, روش (۳۱)	۰/۱۷۶۷۶(-۲)	۰/۳۴۰۴۹(-۱۴)	۰/۱۱۹۲۷(-۷۳)	۵/۲۳۶۱	۱/۷۳۶۵
$\gamma_r = 0/1$, روش (۵۴)	۰/۴۲۲۱۷(-۲)	۰/۱۰۵۴۸(-۱۳)	۰/۷۷۵۳۴(-۸۵)	۶/۳۷۲۳	۱/۸۵۴۰

جدول ۷. مقایسه خطای مطلق، شاخص کارایی و مرتبه همگرایی محاسباتی روش های جدید با دیگر روش ها

$f_5(x) = \log(1+x^2) + e^{-3x+x^2} \sin x$					
روش های بررسی شده	$ x_1 - \alpha $	$ x_2 - \alpha $	$ x_3 - \alpha $	r_c	IE
Newton [۱]	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۷۲۸۶۲(-۱)	۰/۹۰۲۹۷(-۲)	۲	۱/۴۱۴۲
Steffensen [۱]	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۱۱۹۷۱(۰)	۰/۲۸۵۳۳(-۱)	۲	۱/۴۱۴۲
Hally	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۳۸۸۳۴(-۱)	۰/۶۹۴۳۰(-۴)	۳	۱/۴۴۲۳
Chebyshev	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۱۹۳۰۵(-۱)	۰/۲۳۴۸۸(-۴)	۳	۱/۴۴۲۳
Abbasbandy [۲۴]	۰/۶۰۰۰۰(۰)	۰/۳۸۷۳۵(-۱)	۰/۶۶۵۹۲(-۴)	۳	۱/۴۴۲۳
Secant, $x_0 = 0, x_1 = 1$	۰/۱۰۰۰۰(۰)	۰/۱۱۷۴۳(۰)	۰/۳۴۴۱۰(-۲)	۱/۶۱۸۰	۱/۶۱۸۰
Traub (۱۹۶۴), $\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 1$ [۲۵]	۰/۸۰۲۳۲(-۱)	۰/۲۶۵۲۱(-۲)	۰/۲۰۸۷۴(-۵)	۲/۴۶۸۲	۱/۵۷۱۱
Liu et al [۷]	۰/۳۶۲۲۴(-۱)	۰/۲۲۸۶۰(-۴)	۰/۱۴۵۷۸(-۱۷)	۴	۱/۵۸۷۴
$\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 1$ روش (۲۸)	۰/۳۴۴۰۶(-۱)	۰/۵۵۶۴۶(-۵)	۰/۵۲۵۵۰(-۲۱)	۴/۲۳۶۰	۱/۶۱۸۰
$\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 1$ روش (۲۹)	۰/۳۴۴۰۶(-۱)	۰/۱۸۹۲۳(-۵)	۰/۷۶۰۷۵(-۱۵)	۴/۵۶۱۴	۱/۶۵۸۴
$\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 1$ روش (۳۰)	۰/۳۴۴۰۶(-۱)	۰/۱۳۰۶۰(-۵)	۰/۱۰۹۳۵(-۲۶)	۴/۷۸۸۷	۱/۶۸۵۵
$\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 1$ روش (۳۱)	۰/۱۷۶۷۶(-۲)	۰/۴۸۸۰۹(-۶)	۰/۴۲۶۶۳(-۳۰)	۵/۲۳۶۱	۱/۷۳۶۵
$\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 1$ روش (۵۴)	۰/۴۱۰۸۹(-۱)	۰/۲۱۰۰۱(-۶)	۰/۳۵۳۸۹(-۳۸)	۶/۳۷۲۳	۱/۸۵۴۰

جدول ۸. مقایسه شاخص کارایی و مرتبه همگرایی محاسباتی روش های جدید با دیگر روش ها

روش های تکراری بدون حافظه			روش های تکراری باحافظه		
نام روش	مرتبه همگرایی	شاخص کارایی	نام روش	مرتبه همگرایی	شاخص کارایی
روش پتکوویچ و همکاران [۲۰]	۴/۴۴۹۵	۱/۶۴۴۸	روش نیوتن [۱]	۲	۱/۴۱۴۲
روش لاله چینی و همکاران [۱۶]	۶/۳۱۶۶	۱/۸۴۸۵	روش استیفنس [۲]	۲	۱/۴۱۴۲
روش دزونیک-پتکوویچ [۱۶]	۳	۱/۷۳۲۱	روش عباسبندی [۲۴]	۳	۱/۴۴۲۳
روش ونگ [۲۱]	۴/۲۳۶۱	۱/۶۱۸۰	روش استروفسکی [۳]	۴	۱/۵۸۷۴
روش ونگ [۲۱]	۴/۴۴۹۵	۱/۶۴۴۸	روش جارات [۴]	۴	۱/۵۸۷۴
روش تراپ [۲۵]	۴/۴۶۶۱	۱/۵۷۰۳	روش لیو و همکاران [۷]	۴	۱/۵۸۷۴
روش (۲۸)	۴/۲۳۶۲	۱/۶۱۸۱	روش کانگ-تراپ [۸]	۴	۱/۵۸۷۴
روش (۲۹)	۴/۵۶۱۸	۱/۶۵۸۱	روش کینگ [۵]	۴	۱/۵۸۷۴
روش (۳۰)	۴/۷۹۱۵	۱/۶۸۵۹	روش چان [۶]	۴	۱/۵۸۷۴
روش (۳۱)	۵/۲۳۶۱	۱/۷۳۶۵	روش سلیمانی و همکاران [۱۴]	۴	۱/۵۸۷۴
روش (۵۴)	۶/۳۷۲۳	۱/۸۵۴۰	روش کوردرو و همکاران [۱۳]	۴	۱/۵۸۷۴

۶ نتیجه گیری و پیشنهادها

در این مقاله، چندین معادله غیرخطی با ریشه های ساده را با استفاده از روش های تکراری باحافظه حل کرده ایم. این معادلات در اکثر مسائل مربوط به علوم مهندسی دیده می شوند و در این رشته ها کاربرد فراوانی دارند. همان طور که از جدول ۱ مشاهده می شود بهبود مرتبه همگرایی روش های جدید از دیگر روش های ذکر شده در

این مقاله بالاتر است. بهبود مرتبه همگرایی یک روش دوگامی بهین از ۴ به ۴/۲۳۶۱، ۴/۵۶۱۶، ۴/۷۹۱۲، ۵/۲۳۶۱ و ۶/۳۷۲۳ را همان‌طور که در بخش چهارم مشاهده شد، در بخش پنجم نیز با استفاده از مثال‌های عددی، به صورت عملی اثبات شد. مثال‌های عددی جدول‌های ۳ تا ۷ با نتایج موجود در بخش‌های ۳ و ۴ این مقاله هماهنگی کامل دارد. جدول ۸ نشان می‌دهد شاخص کارایی روش باحافظه جدید از دیگر روش‌های موجود بالاتر می‌باشد.

در تحقیقات آتی نیز می‌توان موارد زیر را در نظر گرفت:

- (۱) بحث روی ریشه‌های غیر ساده معادلات غیر خطی.
- (۲) بحث روی ناحیه جذب ریشه‌های معادلات غیر خطی و نقشه‌های دینامیکی آنها.
- (۳) حل دستگاه‌های معادلات غیر خطی با استفاده از روش‌های تکراری.
- (۴) بحث در همگرایی موضعی و نیمه موضعی این روش‌ها.

منابع

- [1] Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C., (1970). Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. Academic Press, New York.
- [2] J.F. Steffensen, (1933). Remarks on iteration, Scandinavian Aktuarietidskr, 16, 64-72.
- [3] Ostrowski, A.M., (1960). Solution of Equations and Systems of Equations. Academic Press, New York.
- [4] Jarratt, P., (1966). Some fourth order multipoint methods for solving equations. Mathematics of Computation, 20, 434-437.
- [5] King, R.F., (1973). A family of fourth-order methods for nonlinear equations. SIAM Journal on Numerical Analysis, 10, 876-879.
- [6] Chun, C., (2008). Some fourth-order iterative methods for solving nonlinear equations. Applied Mathematics and Computation, 195, 454-459.
- [7] Z., Liu, Q., Zheng, P., Zhao, (2010), A variant of Steffensen's method of fourth-order convergence and its applications, Applied Mathematics and Computation, 216, 1978-1983.
- [8] Kung, H.T., Traub, J.F., (1974). Optimal order of one-point and multipoint iteration. Journal of the ACM (JACM), 21, 643-651.
- [9] Chun, C., (2005). Iterative methods improving Newton's method by the decomposition method, Computers and Mathematics with Applications, 50, 1559-1568.
- [10] Chun, C., M.Y. Lee, Neta, B., Dzunic, J., (2012), On optimal fourth-order iterative methods free from second derivative and their dynamics, Applied Mathematics and Computation, 218, 6427-6438.
- [11] Kansal, M., Kanwar, V., Bhatia, S., (2015). New modifications of Hansen-Patrick's family with optimal fourth and eighth orders of convergence, Applied Mathematics and Computation, 269, 507-519.
- [12] Cordero Barbero, A., Hueso Pagoaga, J.L., Martinez Molada, E., Torregrosa Sanchez, J.R., (2013). A new technique to obtain derivative-free optimal iterative methods for solving nonlinear equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 252, 95-102.
- [13] Cordero Barbero, A., Maimo, J., Torregrosa Sanchez, J.R., Vassileva, M., (2015). Solving nonlinear problems by Ostrowski-Chun type parametric families. Journal of Mathematical Chemistry, 53(1), 430-449.
- [14] Soleymani, F., Sharma, R., Li, X., Tohidi, E., (2012). An optimized derivative-free form of the Potra-Ptak method, Mathematical and Computer Modelling, 56, 97-104.
- [15] Neta, B., (1983). A new family of higher order methods for solving equations, International Journal of Computer Mathematics, 14(2), 191-195.
- [16] Lalehchini, M. J., Lotfi, T., Mahdiani, K., (2020), On Developing an Adaptive Free-Derivative Kung and Traub's Method with Memory, Journal of Mathematical Extension, 14(3), 221-241.

- [17] Torkashvand, V., (2019). Structure of an Adaptive with Memory Method with Efficiency Index 2, *International Journal of Mathematical Modelling & Computations*, 9(4), 239-252.
- [18] Torkashvand, V., Kazemi, M., (2020). On an Efficient Family with Memory with High Order of Convergence for Solving Nonlinear Equations, *International Journal Industrial Mathematics*, 12(2), 209-224.
- [19] Petkovic, M.S., Neta, B., Petkovic, L.D., Dzunic, J., (2014). Multipoint methods for solving nonlinear equations: A survey. *Applied Mathematics and Computation*, 226, 635-660.
- [20] Petkovic, M.S., Ilic S., Dzunic J., (2010). Derivative free two-point methods with and without memory for solving nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation*, 217 (5), 1887-1895.
- [21] Wang, X., (2018). A new accelerating technique applied to a variant of Cordero-Torregrosa method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 330, 695-709.
- [22] Soleymani, F., Lotfi, T., Tavakoli E., Haghani F.K., (2015). Several iterative methods with memory using- accelerators, *Applied Mathematics Computation*, 254, 452-458.
- [23] Cordero, A., Lotfi, T., Torregrosa, J.R., Assari, P., Mahdiani, K., (2016). Some new bi-accelerator two-point methods for solving nonlinear equations, *Computation. Applied. Mathematics*. 35, 251-267.
- [24] Abbasbandy, S., (2006). Modified homotopy perturbation method for nonlinear equations and comparison with Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 172 (1), 431-438.
- [25] Traub, J.F., (1964). *Iterative Methods for the Solution of Equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [26] Dzunic, J., Petkovic, M. S., (2012). A cubically convergent Steffensen-like method for solving nonlinear equations, *Applied Mathematics Letters*, 25, 1881-1886.
- [27] Sharifi, S., Siegmund, S., Salimi, M., (2016). Solving nonlinear equations by a derivative-free form of the King's family with memory, *Calcolo*, 53 (2), 201-215.
- [28] Torkashvand, V., Lotfi, T., Fariborzi Araghi, M.A., (2019). A new family of adaptive methods with memory for solving nonlinear equations, *Mathematical Sciences*, 13, 1-20.
- [29] Ahdi Aghdam, R., Rezapour, R., (1389). Development of Newton iterative methods and introduction of fast methods for solving nonlinear equations. *Journal of Operations Research in Its Applications*, 7 (3), 11-19.
- [30] Ahdi Aghdam, R., Qousi, S., (1388). Newton-like iterative methods for nonlinear equation systems. *Journal of Operations Research in Its Applications*, 6 (23), 1-10.
- [31] Ullah, M. Z., Torkashvand, V., Shateyi, Stanford., Asma, M., (2022). Using matrix eigenvalues to construct an iterative method with the highest possible efficiency index two, *Mathematics*, 10(1370), 1-15.
- [32] Torkashvand, V., (2022). A two-step method adaptive with memory with eighth-order for solving nonlinear equations and its dynamic, *Computational Methods for Differential Equations*, 50(1), 2022, 1007-1026.
- [33] Moccari, M., Lotfi, T., Torkashvand, V., (2022). On Stability of a Two-Step Method for a Fourth-degree Family by Computer Designs along with Applications, *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications (IJNAA)*, 2022, inpress, 1-15.