Journal of Operational Research in its Applications
Vol.23, NO.1, Spring 2026
ISSN: 2251-7286
DOI: 10.71773/jamlu-2026-1-1984

Solving Delay-Differential Equation via Optimal Control Technique

H. Rouhparvar[1*]
[1] *Assistant Professor, Department of Mathematic, Sav. C., Islamic Azad University, Saveh, Iran.*

Received: 10 June 2025
Accepted: 26 October 2025

Abstract: In this paper, aims to present a computational approach for the numerical solution of Delay Differential Equations (DDEs) with initial conditions. Unlike methods that solve the equation through direct discretization, the proposed technique converts the Delay Differential Equation into an Optimal Control (OC) problem. The Optimal Control problem is then solved using the Iterative Dynamic Programming (IDP) method, due to its ability to handle nonlinear optimization problems and control constraints. Finally, several numerical examples are presented to demonstrate the efficiency and performance of the proposed technique, which confirms its reliability and accuracy.

Introduction: Delay differential equations arise when the rate of change of a system's state at a given time depends not only on the current state but also on a past state. This characteristic makes DDE-based models a powerful tool for modeling phenomena where time delay plays a vital role, leading to increased use in recent decades, and especially in recent years. One of the most widely used areas for DDEs is the field of life sciences and medicine, including the modeling of infectious diseases and epidemiology, tumor-immune system interactions, and treatment strategies.

Materials and Methods: Different methods have been presented for investigating the exact and approximate solutions of the DDEs. The objective of this paper is to present an optimal control technique for a dynamic DDE and solve it using the IDP method. Iterative dynamic programming is a very powerful technique for solving optimization problems in dynamic systems. This method is computationally straightforward to implement and achieves full optimality. Crucially, its implementation does not involve solving a separate nonlinear programming problem to obtain the optimal solution.

Results and Discussion: In this research, a broad class of delay differential equations is studied with initial conditions. The analyses and numerical simulation results clearly denoted that the IDP method is an efficient and reliable approach for models containing time delays. With the availability of high-speed computers and the development of the dynamic programming method, an alternative option to the Calculus of Variations approach is now available for optimal control problems.

Conclusions: In this paper, we presented a computational method for DDEs. The main idea lies in transforming the DDEs into an equivalent optimal control problem. This transformation enables the solution of delay differential equations within the well-behaved

* *Corresponding Author: rouhparvar59@iau.ac.ir & rouhparvar59@gmail.com .*

and standard domain of optimal control theory. For the optimal control problem, the IDP method was successfully applied. Numerical simulation analyses and results clearly demonstrated that the IDP method is an efficient and reliable approach for models containing time delays. In final, this study represents a new path for solving delayed dynamic problems via the optimal control framework, paving the way for future analyses in complex engineering and biological systems where time delays play a crucial role.

Keywords: Delay-Differential Equation, Iterative Dynamic Programming, Optimal Control, Approximate Solution.

مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال بیست و سوم، شماره اول (پیاپی ۸۸)، بهار۰۵، ص ص ۱۵۶-۱۴۵
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱
DOI: 10.71773/jamlu-2026-1-1984

حل معادله دیفرانسیل- تاخیری از طریق تکنیک کنترل بهینه

حمید روح پرور[1]
۱- استادیار، گروه ریاضی، واحد ساوه، دانشگاه آزاد اسلامی، ساوه، ایران

رسید مقاله: ۲۰ خرداد ۱۴۰۴
پذیرش مقاله: ۴ آبان ۱۴۰۴

چکیده
در این مقاله، هدف ارایه یک رهیافت محاسباتی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل- تاخیری با شرایط آغازین است. بر خلاف روش‌هایی که با گسسته‌سازی مستقیم معادله را حل می‌کند، تکنیک پیشنهادی معادله دیفرانسیل- تاخیری را به یک مساله کنترل بهینه تبدیل می‌کند. مساله کنترل بهینه با روش برنامه‌ریزی پویای تکراری به دلیل توانایی آن در مقابله با مسایل بهینه‌سازی غیرخطی و محدودیت‌های کنترلی، حل می‌شود. در انتها چندین مثال برای نشان دادن کارایی و عملکرد تکنیک پیشنهاد شده ارایه می‌شوند که قابلیت اطمینان و صحت این روش را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: معادله دیفرانسیل- تاخیری، برنامه‌ریزی پویای تکراری، کنترل بهینه، جواب تقریبی.

۱ مقدمه
معادلات دیفرانسیل- تاخیری زمانی اتفاق می‌افتد که نرخ تغییر حالت در یک زمان مفروض، نه تنها به وضعیت کنونی بلکه وابسته به حالت گذشته است. این ویژگی باعث می‌شود مدل‌های مبتنی بر معادلات دیفرانسیل- تاخیری، در دهه‌های اخیر و به ویژه در سال‌های اخیر، به ابزاری قدرتمند برای مدل‌سازی پدیده‌هایی تبدیل شوند که در آن‌ها تاخیر زمانی نقش حیاتی ایفا می‌کند. معادلات دیفرانسیل- تاخیری به عنوان سیستم‌های "با حافظه" نیز شناخته می‌شوند. از پرکاربردترین مدل‌ها برای معادلات دیفرانسیل – تاخیری در حوزه علوم زیستی و پزشکی می‌توان مدل‌سازی بیماری‌های عفونی و همه گیرشناسی، تعامل تومور-سیستم ایمنی و درمان، مدل‌سازی انتشار سیگنال‌های الکتریکی در نورون‌ها که با تاخیرهای کوچک اما مهمی در ارتباطات سیناپسی همراه است را نام برد [۵،۴،۳،۲،۱]. معادلات دیفرانسیل- تاخیری برای تحلیل پایداری و الگوهای نوسانی در این شبکه‌ها به کار می‌روند. تاخیر زمانی یک پدیده رایج در بسیاری از سیستم‌های فیزیکی و مهندسی مانند پایدارسازی و کنترل سیستم‌ها و فیلترهای هواساز است. معادلات تاخیری به‌طور موفقیت‌آمیزی در سیستم‌هایی که در آن‌ها انتقال

[1] عهده دار مکاتبات:
ایمیل: rouhparvar59@iau.ac.ir

سیگنال یا فرآیند پردازش با تاخیر همراه است، در مدل‌های مالی، مدل‌های اقتصادی و جمعیتی، شبکه‌های توزیع‌شده، مدل‌های یادگیری به‌کار برده شده است [۶،۷،۸،۹،۱۰،۱۱،۱۲].

روش‌های گوناگونی برای بررسی جواب دقیق و تقریبی از معادلات دیفرانیسل- تاخیری بیان شده است [۱۳،۱۴،۱۵،۱۶،۱۷]. هدف این مقاله بیان یک تکنیک کنترل بهینه از معادله دیفرانسیل- تاخیری دینامیکی است و آن را از طریق روش برنامه‌ریزی پویای تکراری حل می‌کند. برنامه‌ریزی پویای تکراری یک روش خیلی قدرتمند برای حل مسایل بهینه‌سازی سیستم‌های دینامیکی است. با در دسترس بودن کامپیوترهای سرعت بالا و توسعه روش برنامه‌ریزی پویا، اکنون یک گزینه جایگزین با رهیافت حساب تغییرات به مسایل کنترل بهینه در دسترس است. روش برنامه‌ریزی پویا به‌وسیله لوس (Luus) توسعه‌یافته است [۱۸] و با بعضی خواص خوب توجه تعدادی از محققین را جلب کرده است [۱۹، ۲۰]. این روش در اجرا آسان و کاملا بهینه است، و شامل راه حل یک برنامه‌ریزی غیرخطی برای به‌دست آوردن جواب بهینه نیست.

این مقاله به صورت زیر سازماندهی می‌شود: در بخش دوم فرم معادله دیفرانسیل – تاخیری مطرح می‌شود. در بخش سوم، مساله کنترل بهینه از معادله دیفرانسیل- تاخیری با تکنیک طراحی‌شده معرفی می‌شود. تشریح برنامه‌ریزی پویای تکراری برای مساله کنترل بهینه در بخش چهارم بیان شده است. در بخش پنجم، چندین مثال بیان می‌شوند که بر سادگی روش پیشنهاد شده در حل مسایل کنترل بهینه متمرکز است. نتایج در بخش ششم ارایه شده است.

۲ بیان مساله

در این تحقیق، روی کلاس وسیعی از معادلات تاخیری به‌فرم

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), \\ y(\alpha_1 t + \beta_1), \ldots, y(\alpha_m t + \beta_m)), \end{aligned} \tag{1}$$

با شرایط آغازین

$$\begin{aligned} & y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \\ & y(t) = g(t) \quad t \le t_0, \end{aligned} \tag{2}$$

مطالعه می‌شود که $t \in [t_0, T]$، $t_0, T \ge 0$، $\beta_i \ge 0$، $0 \le \alpha_i \le 1$ برای $i = 1, \ldots, m$، $g(t)$ یک تابع مفروض پیوسته که تابع آغازین نامیده می‌شود.

۳ انتقال معادله به مدل کنترل بهینه

معادله دیفرانسیل- تاخیری (۱) را با شرایط آغازین (۲) در نظر بگیرید. ابتدا فرض کنید

$$\begin{aligned} & x_1(t) = y(t), \\ & x_2(t) = y'(t), \\ & \quad \vdots \\ & x_n(t) = y^{(n-1)}(t), \end{aligned} \tag{3}$$

در نتیجه، معادله (۱) به یک سیستم مرتبه اول به شکل زیر انتقال می یابد

$$\begin{aligned} &x_1'(t) = x_2(t),\\ &x_2'(t) = x_3(t),\\ &\quad\vdots\\ &x_n'(t) = f(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{n-1}(t),\\ &\qquad x_1(\alpha_1 t+\beta_1), \ldots, x_{n-1}(\alpha_m t+\beta_m)), \end{aligned} \tag{۴}$$

که شرایط آغازین به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned} &x_1(t_0) = y_0,\\ &x_2(t_0) = y_1,\\ &\quad\vdots\\ &x_n(t_0) = y_{n-1}. \end{aligned} \tag{۵}$$

تابع $f^0 : I \times \prod_{j=1}^{n} A_j \times \prod_{j=1}^{n} U_j \to \mathbb{R}$ به‌فرم

$$\begin{aligned} f^0(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), x_1'(t), \ldots, x_n'(t)) = \sum_{i=1}^{n-1} \left\| x_i'(t) - x_{i+1}(t) \right\|_2^2 +\\ \left\| x_n'(t) - f(t, x_1(t), \ldots, x_{n-1}(t), x_1(\alpha_1 t+\beta_1), \ldots, x_{n-1}(\alpha_m t+\beta_m)) \right\|_2^2, \end{aligned} \tag{۶}$$

تعریف می‌شود که مجموعه‌های A_1،...، A_n و U_1،...، U_n زیرمجموعه‌های فشرده از $\mathbb{R}$ هستند.

یک تابعی خطا به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$E[x_1(.), \ldots, x_n(.), x_1'(.), \ldots, x_n'(.)] = \int_{t_0}^{T} f^0(t, x_1(.), \ldots, x_n(.), x_1'(.), \ldots, x_n'(.))dt, \tag{۷}$$

و سپس مساله مینیمم‌سازی به‌فرم زیر سازماندهی می‌شود

$$\begin{aligned} &\min\ E[x_1(.), \ldots, x_n(.), x_1'(.), \ldots, x_n'(.)] = \int_{t_0}^{T} f^0(t, x_1(.), \ldots, x_n(.), x_1'(.), \ldots, x_n'(.))dt,\\ &s.t.\ \ x_1(t_0) = y_0,\\ &\quad x_2(t_0) = y_2,\\ &\quad\ \vdots\\ &\quad x_n(t_0) = y_{n-1}. \end{aligned} \tag{۸}$$

اگر جواب بهینه از مینیمم‌سازی (۸) صفر باشد، چون تابع f^0 پیوسته و نامنفی است پس $f^0 \equiv 0$، پس سیستم مرتبه اول (۴) برای همه $t \in I$ صدق خواهد کرد و جواب دقیق (۱) به‌دست آورده می‌شود. اما اگر مینیمم تابعی E صفر نباشد، پس جواب بهینه (۸) جواب تقریبی از (۴) است. در نتیجه، اگر فرض شود

$$x_1'(t) = u_1(t), \ldots, x_n'(t) = u_n(t), \tag{۹}$$

که $u_1, \ldots, u_n$ متغیرهای کنترل مصنوعی نامیده می‌شوند، پس مساله (۸) به مساله کنترل بهینه زیر انتقال می‌یابد:

$$\begin{aligned}
&\min\ E[x_1(.),\ldots,x_n(.),u_1(.),\ldots,u_n(.)] = \int_{t_0}^{T} f^0(t,x_1(.),\ldots,x_n(.),u_1(.),\ldots,u_n(.))dt,\\
&s.t.\ \ x_1'(t) = u_1(t),\\
&\qquad x_2'(t) = u_2(t),\\
&\qquad\quad \vdots\\
&\qquad x_n'(t) = u_n(t),\\
&\qquad x_1(t_0) = y_0,\ x_2(t_0) = y_2,\ldots,x_n(t_0) = y_{n-1},
\end{aligned} \tag{10}$$

که

$$\begin{aligned}
f^0(t,x_1(t),\ldots,x_n(t),u_1(t),\ldots,u_n(t)) = \sum_{i=1}^{n-1}\|u_i(t)-x_{i+1}(t)\|_2^2 +\\
\|u_n(t)-f(t,x_1(t),\ldots,x_{n-1}(t),x_1(\alpha_1 t+\beta_1),\ldots,x_{n-1}(\alpha_m t+\beta_m))\|_2^2,
\end{aligned}$$

و

$$x_i(t) = g(t),\ i = 1,2,\ldots,m,\ \ t \le t_0.$$

٤ روش برنامه‌ریزی پویای تکراری

در روش برنامه‌ریزی پویای تکراری ابتدا بازه زمانی $[0,T]$ به P زیربازه زمانی هرکدام به طول L، که $L = \frac{T}{P}$ می‌باشد، تقسیم می‌شود. در هریک از این P زیربازه ایجادشده روی J، کنترل ثابت از ناحیه مجاز در هر نقطه از شبکه در نظر گرفته می‌شود. سپس با استفاده از اصل بلمن تابع کنترل را توسط کنترل های قطعه‌ای ثابت روی این P زیربازه تقریب می‌زند، به طوری که در بازه زمانی $t_k \le t \le t_{k+1}$ $(k = 0,1,\ldots,P-1)$ کنترل به صورتی که در الگوریتم توضیح داده خواهد شد، برابر مقدار ثابت $u(t) = u^*(k)$ به‌دست آید. در واقع مساله پیدا کردن $u^*(k)$ است به طوری که تابع هدف مساله (۱۰) کمینه گردد. روش برنامه‌ریزی پویای تکراری برای انتخاب بهینه تابع کنترل به صورت قطعه‌ای ثابت با گام‌های زیر انجام می‌شود:

۱- بازه ی زمانی $[0,T]$ را به P زیربازه هر کدام به طول $L = \frac{T}{P}$ تقسیم کنید.

۲- تعداد نقاط شبکه N و تعداد مقادیر مورد آزمایش برای کنترل $u \in U$، R را انتخاب کنید.

۳- ناحیه‌ی $r \in U$ برای مقادیر مجاز کنترل و ضریب γ برای انقباض ناحیه r را انتخاب کنید (ضریب انقباضی γ معمولاً عددی بین ۰/۷۵ و ۰/۹۵ است و باعث کوچک‌تر شدن ناحیه‌ای که کنترل‌ها از آن انتخاب می‌شود، می‌باشد).

۴- برای تولید شبکه، N مقدار مجاز برای کنترل از داخل ناحیه ی r انتخاب کنید (اگر تکرار اول نباشد این N مقدار از داخل ناحیه ی مجاز به‌دست آمده از گام (۸) الگوریتم انتخاب کنید)، و به ازای هر

یک از این مقادیر از معادلات (۱۰) N مسیر تولید شود و مقدار x را از ابتدای هر مرحله زمانی ذخیره کنید. بنابراین در ابتدای هر بازه ی زمانی یک شبکه از N نقطه خواهید داشت.

۵- اکنون یک روند پسرو را از آخرین بازه‌ی زمانی (زیر بازه Pام) که متناظر با زمان $T-L$ می‌باشد شروع کنید. برای هر یک از N نقطه شبکه از معادلات (۱۰) از $T-L$ تا T به ازای هر یک از R مقدار کنترل قابل قبول که به صورت تصادفی از ناحیه ی r انتخاب شده‌اند، مسیر به‌دست می‌آورید (اگر تکرار اول باشد این R مقدار را از ناحیه ی r انتخاب کرده در غیر این‌صورت از رابطه

$$u(P-1)=u^{*j}(P-1)+Dr^{j}$$

که D ماتریسی قطری از مرتبه m است که درایه‌های آن اعداد تصادفی بین ۱ و ۱-، و $u^{*j}(P-1)$ بهترین کنترل به‌دست آمده از تکرار قبل است و r^{j} برداری $m\times 1$ که مولفه‌های آن طول ناحیه‌ی مجاز برای انتخاب کنترل‌ها می‌باشند)، و کنترلی که تابع هدف را کمینه کند انتخاب کرده و مقدار این کنترل را برای استفاده در مراحل بعدی الگوریتم ذخیره کنید. بنابراین به هریک از N نقطه شبکه در $T-L$ یک بهترین کنترل نسبت داده می‌شود.

۶- در اولین مرحله روند پسرو به عقب، یعنی به مرحله $P-1$ باز می‌گردد، متناظر با زمان $T-2L$ برای هریک از N نقطه شبکه از معادلات (۱۰) از $T-2L$ تا $T-L$ به ازای هریک از Rمقدار کنترل قابل قبول که به صورت تصادفی همانند مرحله‌ی قبلی الگوریتم انتخاب شده‌اند، مسیر به‌دست می‌آید. برای ادامه‌ی مسیر از $T-L$ تا T کنترلی را از گام (۵) الگوریتم انتخاب کنید که با نزدیک‌ترین نقطه شبکه به مسیر x در $T-L$ متناظر است. آنگاه R مقدار به‌دست آمده تابع هدف را که از R مقدار کنترل مجاز حاصل می‌شوند مقایسه کرده و مقدار کنترلی که کم‌ترین مقدار تابع هدف را می‌دهد متناظر آن نقطه شبکه ذخیره کنید.

۷- روش پسرو را تا اولین بازه‌ی زمانی ادامه دهید، توجه دارید که در شروع ($t=0$) شبکه دارای نقطه واحد است چون حالت اولیه مشخص است مانند قبل از معادلات (۱۰) مسیرها به‌دست می‌آید و R مقدار تابع هدف را مقایسه کرده و به کنترل‌هایی که تابع هدف با آن‌ها کمینه می‌گردد، در بازه kام با $u^{*}(k)$ نمایش داده می‌شود، به این ترتیب یک تکرار روش برنامه‌ریزی پویا به اتمام رسیده است.

۸- طول ناحیه‌ی مجاز برای مقادیر کنترل را توسط ضریب γ به صورت زیر کاهش دهید

$$r^{j+1}=\gamma r^{j},\ j=1,2,\ldots$$

و ناحیه را طوری در نظر بگیرید که کنترل به‌دست آمده در مرحله (۷) الگوریتم نقطه میانی ناحیه باشد.

۹- به اندیس تکرار j یک واحد اضافه کنید و اگر به تعداد موردنظر تکرار صورت گرفته باشد به روش خاتمه دهید در غیر این‌صورت به مرحله (۴) الگوریتم باز گردید.

۵ مثال

در این بخش، مزیت و دقت از روش برنامه‌ریزی پویای تکراری برای حل معادلات دیفرانسیل- تاخیری با به‌کار بردن تاخیرهای متفاوت توضیح داده می‌شود.

مثال ۱. معادله دیفرانسیل- تاخیری غیرخطی را در نظر بگیرید [۱۴]

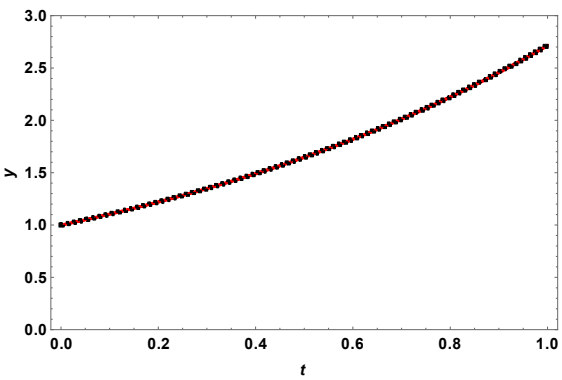
$$\begin{aligned} &y'(t)=\frac{۱}{۲}e^{\frac{t}{۲}}y(\frac{t}{۲})+\frac{۱}{۲}y(t), \quad ۰\le t\le ۱, \\ &y(۰)=۱, \end{aligned} \tag{۱۱}$$

که جواب دقیق آن $y(t)=e^{t}$ است.

فرض کنید $y'(t)=u(t)$، لذا طبق بخش ۳ معادله (۱۱) به مساله کنترل بهینه زیر تغییر می‌یابد:

$$\begin{aligned} &\min\ E[y(.),u(.)]=\int_{۰}^{۱}(u(t)-\frac{۱}{۲}e^{\frac{t}{۲}}y(\frac{t}{۲})-\frac{۱}{۲}y(t))dt, \\ &s.t.\ \ y'(t)=u(t), \\ &\quad\ \ y(۰)=۱. \end{aligned} \tag{۱۲}$$

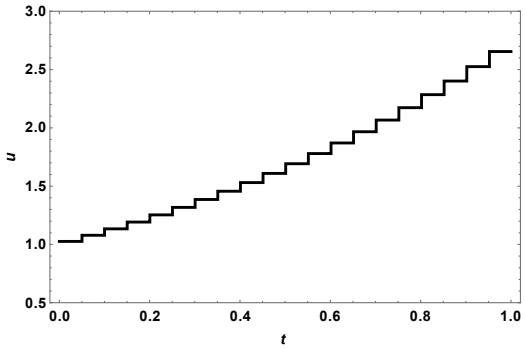
جواب تقریبی مساله (۱۲) در بازه $[۰,۱]$ با روش برنامه‌ریزی پویای تکراری، با انتخاب $P=۲۰$، $R=۳۰$، $\gamma=۰/۷۵$، $N=۱$ و ناحیه مجاز برای متغیر کنترل $u(t)$ در بازه $[۰/۵,۳]$، به‌دست می‌آید. با استفاده از ۴۰ تکرار مقدار تابعی خطا برابر $E=۶/۶۱۷۵\times ۱۰^{-۴}$ است. نمودار جواب دقیق به رنگ قرمز و جواب تقریبی به رنگ سیاه در شکل ۱ و نمودار متغیر کنترل در شکل ۲ و نمودار تابعی خطا در شکل ۳ نشان داده شده‌اند. جواب تقریبی در برخی نقاط در جدول ۱ نشان داده شده است.



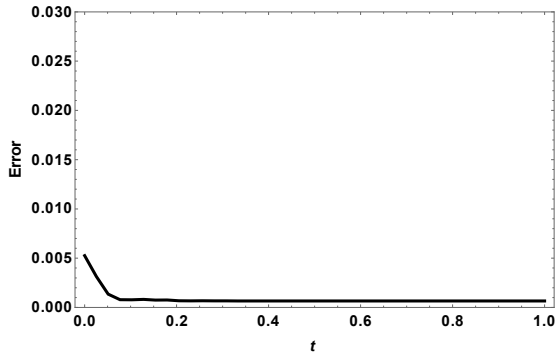
شکل ۱. جواب دقیق (رنگ قرمز) جواب تقریبی (رنگ سیاه).

t	جواب دقیق	جواب روش پیشنهاد شده
۰	۱	۱
۰/۲۵	۱/۲۸۴۰۳	۱/۲۸۴۲۲
۰/۵	۱/۶۴۸۷۲	۱/۶۴۹۲۳
./۷۵	۲/۱۱۷	۲/۱۱۷۹۷
۱	۲/۷۱۸۲۸	۲/۷۱۹۹۳

جدول ۱. نمایش جواب دقیق و تقریبی در چند نقطه.



شکل ۲. نمودار متغیر کنترل.



شکل ۳. نمودار تابعی خطای E.

مثال ۲. معادله دیفرانسیل- تاخیری غیرخطی مرتبه سوم را در نظر بگیرید [۱۳]

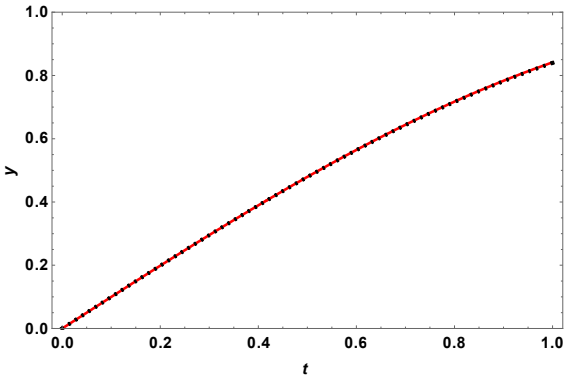
$$\begin{aligned} &y'''(t) = ۲y^{۲}(\frac{t}{۲}) - ۱, \quad ۰ \le t \le ۱, \\ &y(۰) = ۱, y'(۰) = ۱, y''(۰) = ۰. \end{aligned} \tag{۱۳}$$

که جواب دقیق آن $y(t) = \sin t$ است.

با انتخاب $y(t) = x_{۱}(t)$، $y'(t) = x_{۲}(t)$ و $y''(t) = x_{۳}(t)$، معادله (۱۳) با استفاده از روش پیشنهادشده به شکل مساله کنترل بهینه زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} &\min\ E[x_{۱}(.), x_{۲}(.), x_{۳}(.), u_{۱}(.), u_{۲}(.), u_{۳}(.)] = \\ &\qquad \int_{۰}^{۱} ((u_{۱}(t) - x_{۲}(t))^{۲} + (u_{۲}(t) - x_{۳}(t))^{۲} + (u_{۳}(t) - ۲x_{۱}^{۲}(\frac{t}{۲}) + ۱)^{۲})dt, \\ &s.t.\ \ x_{۱}'(t) = u_{۱}(t), \\ &\qquad x_{۲}'(t) = u_{۲}(t), \\ &\qquad x_{۳}'(t) = u_{۳}(t), \\ &\qquad x_{۱}(۰) = ۰, x_{۲}(۰) = ۱, x_{۳}(۰) = ۰. \end{aligned} \tag{۱۴}$$

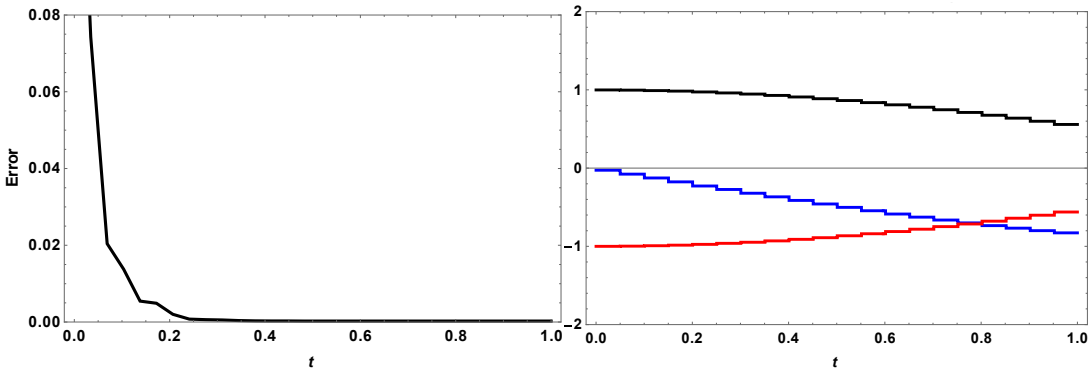
جواب تقریبی مساله (۱۴) در بازه $[۰,۱]$ با روش برنامه‌ریزی پویای تکراری، با انتخاب $P = ۲۰$، $R = ۳۰$، $\gamma = ۰/۷۵$، $N = ۱$ و ناحیه مجاز برای متغیرهای کنترل $u_{۱}(t) \in [۰,۲]$، $u_{۲}(t) \in [-۱,۱]$ و $u_{۳}(t) \in [-۲,۰]$، به‌دست می آید. با استفاده از ۳۰ تکرار مقدار تابعی خطا برابر $E = ۲/۶۵۷۲ \times ۱۰^{-۴}$ است. نمودار جواب دقیق به رنگ قرمز و جواب تقریبی به رنگ سیاه در شکل ۴ و نمودار متغیرهای کنترل در شکل ۵ و نمودار تابعی خطا در شکل ۶ نشان داده شده‌اند. جواب تقریبی در برخی نقاط در جدول ۲ نشان داده شده است.



شکل ٤. جواب دقیق (رنگ قرمز) جواب تقریبی (رنگ سیاه).

t	جواب دقیق	جواب روش پیشنهاد شده
۰	۰	۰
۰/۲۵	۰/۲۴۷۴۰۴	۰/۲۴۷۲۵۱
۰/۵	۰/۴۷۹۴۲۶	۰/۴۷۸۸۱۸
./۷۵	۰/۶۸۱۶۳۹	۰/۶۸۰۶۰۵
۱	۰/۸۴۱۴۷۱	۰/۸۳۹۹۳۷

جدول ۲. نمایش جواب دقیق و تقریبی در چند نقطه.



شکل ٦. نمودار تابعی خطای E.

شکل ٥. نمودار متغیرهای کنترل.

مثال ۳. معادله دیفرانسیل- تاخیری زیر را در نظر بگیرید [۱۴]

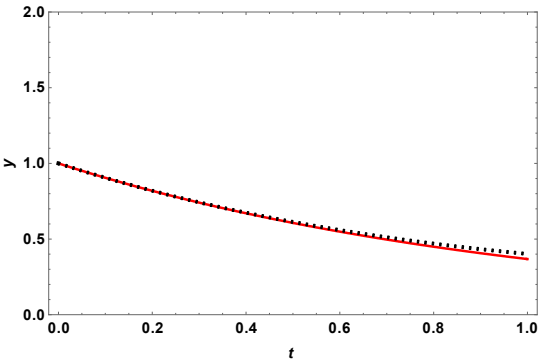
$$\begin{aligned} &y'''(t) = -y(t) - y(t-\circ.۳) + e^{-t+\circ.۳}, \quad \circ \le t \le ۱, \\ &y(\circ) = ۱, y'(\circ) = -۱, y''(\circ) = ۱, \\ &y(t) = e^{-t}, \ t \le \circ \end{aligned} \tag{۱۵}$$

که جواب دقیق آن $y(t) = e^{-t}$ است.

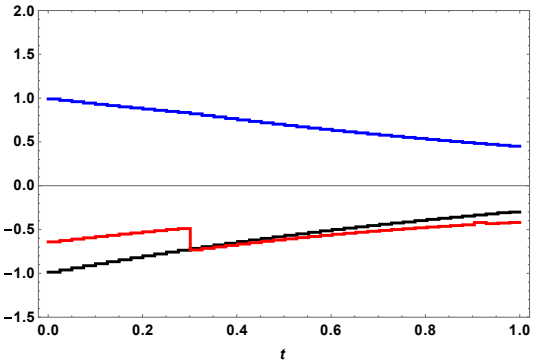
فرض کنید $y(t) = x_۱(t)$، $y'(t) = x_۲(t)$ و $y''(t) = x_۳(t)$، لذا معادله (۱۵) به مساله کنترل بهینه زیر انتقال می‌یابد

$$\begin{aligned} &\min\ E[x_۱(.), x_۲(.), x_۳(.), u_۱(.), u_۲(.), u_۳(.)] = \\ &\qquad \int_\circ^۱ ((u_۱(t) - x_۲(t))^۲ + (u_۲(t) - x_۳(t))^۲ + (u_۳(t) + x_۱(t) + x_۱(t-\circ.۳) - e^{-t+\circ.۳})^۲) dt, \\ &s.t.\ \ x_۱'(t) = u_۱(t), \\ &\qquad x_۲'(t) = u_۲(t), \\ &\qquad x_۳'(t) = u_۳(t), \\ &\qquad x_۱(\circ) = ۱, x_۲(\circ) = -۱, x_۳(\circ) = ۱, \\ &\qquad x_۱(t) = e^{-t}, \ t \le \circ. \end{aligned} \tag{۱۶}$$

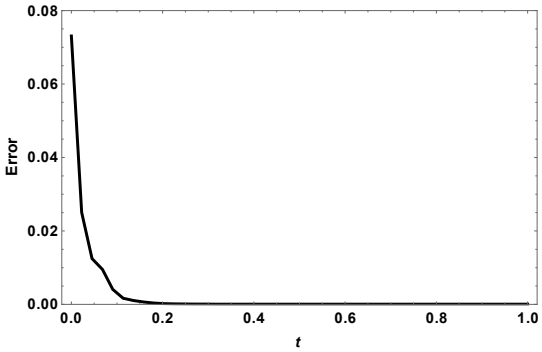
جواب تقریبی مساله (۱۶) در بازه $[0,1]$ با روش برنامه‌ریزی پویای تکراری، با انتخاب $P=40$، $R=70$، $N=1, \gamma=0/75$ و ناحیه مجاز برای متغیرهای کنترل $u_1(t)\in[-1/5,0]$، $u_2(t)\in[0,2]$ و $u_3(t)\in[-1/5,0]$، به‌دست می‌آید. با استفاده از ۴۵ تکرار مقدار تابعی خطا برابر $E=6/5216\times10^{-5}$ است. نمودار جواب دقیق به رنگ قرمز و جواب تقریبی به رنگ سیاه در شکل ۷ و نمودار متغیرهای کنترل در شکل ۸ و نمودار تابعی خطا در شکل ۹ نشان داده شده‌اند.



شکل۷. جواب دقیق (رنگ قرمز) جواب تقریبی (رنگ سیاه)



شکل ۸. نمودار متغیرهای کنترل.



شکل ۹. نمودار تابعی خطای E.

٦ نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش محاسباتی برای معادلات دیفرانسیل–تاخیری ارایه دادیم. نوآوری اصلی تبدیل معادلات دیفرانسیل–تاخیری به یک مسال کنترل بهینه معادل است که این تبدیل، حل معادلات دیفرانسیل با تاخیر را در حوزه خوش‌رفتار و استاندارد تئوری کنترل بهینه ممکن می‌سازد. برای مساله کنترل بهینه حاصل، با موفقیت روش برنامه‌ریزی پویای تکراری استفاده شد. تحلیل‌ها و نتایج شبیه‌سازی عددی به وضوح نشان دادند که روش برنامه‌ریزی پویای تکراری یک روش کارا و قابل اعتماد برای مدل‌های حاوی تاخیر زمانی است. در نهایت، این مطالعه مسیر جدیدی را برای حل مسایل دینامیک تاخیری از طریق مساله کنترل بهینه بیان کرده و راه را برای تحلیل‌های آینده در سیستم‌های پیچیده مهندسی و زیستی که تاخیرهای زمانی در آن‌ها نقشی حیاتی دارند، هموار می‌کند.

منابع

[1] Guglielmi N., Iacomini E., Viguerie A., (2022). Delay differential equations for the spatially resolved simulation of epidemics with specific application to COVID-19. Math. Meth. Appl. Sci., 45, 4752–4771.
[2] F. Brauer, C. Castillo-Chavez, (2012). Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, 2rd edition, Springer, New York.
[3] Diekmann O., Van Gils S.A., Verduyn Lunel S.M., Walther H.-O., (1995). Delay Equations, Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis. Springer-Verlag, New York.
[4] Driver R., (1977). Ordinary and Delay Differential Equations. Applied Mathematical Sciences 20, Springer-Verlag, Berlin.
[5] H. Smith, (2010). An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences, Springer Science & Business Media.
[6] Ansari M. R., (2020). Approximate solution of initial and boundary value problem using optimization based on Bernstein polynomial collocation method, J. of Operation Research and Its Applications (Applied Mathematics-Lahijan Azad University), 17(3), 45-62. (In Persian)
[7] Erneux T., (2009). Applied delay differential equations. V 3 of Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, Springer, New York.
[8] Gopalsamy K., (1992). Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Populations Dynamics. Kluwer, Dordrecht.
[9] F. A. Rihan, (2003). Sensitivity analysis for dynamic systems with time-lags, J. Comp. App. Math., 28.
[10] Kolmanovski V., Myshkis A., (1999). Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Kluwer.
[11] Kuang Y., (1993). Delay differential equations with applications in population dynamics. Academic press, INC, New York.
[12] Pourjafari S., Ayati Z., (2022). A new optimal MVIM to solve two biological species system. J. of Operation Research and Its Applications (Applied Mathematics-Lahijan Azad University), 19(4), 11-126. (In Persian)
[13] Alomari A.K., Noorani M.S.M., Nazar R., (2009). Solution of delay differential equation by means of homotopy analysis method. Acta Applicandae Mathematicae, 108(2), 395-412.
[14] Evans D.J., Raslan K.R., (2005). The Adomian decomposition method for solving delay differential equation. International Journal of Computer Mathematics, 82(1), 49-54.
[15] Iskakova N., Temesheva A., Uteshova R., (2023). On a problem for a delay differential equation. Wiley, 46(9), 11283-11297.
[16] Kiss G., Lessard J.-P., (2012). Computational fixed-point theory for differential delay equations with multiple time lags. Journal Differential Equations, 252(4), 3093-3115.
[17] Obut T., Cimen E., Cskir M., (2023). A novel numerical approach for solving delay differential equations arising in population dynamics. Mathematical Modelling and control, 3(3), 233-243.
[18] Luus R., Iterative dynamic programming. Chapman & Hall 2000.
[19] Effati S., Roohparvar H., (2006). Iterative dynamic programming for solving linear and nonlinear differential equations. Applied Mathematics and Computation,175, 247-257.
[20] Effati S., Roohparvar R., (2006). The minimization of the fuel costs in the train transportation. Applied Mathematics and Computation, 175,1415-1431.