مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال بیستم، شماره چهارم (پیاپی ۷۹)،زمستان ۰۲، ص ص ۹۴-۷۹
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

برخی شرایط لازم وکافی برای شناسایی نقاط اتکا در تحلیل پوششی داده‌ها

علی اکبر بانی[۱]، محسن رستمی مال خلیفه[۲*]، فرهاد حسین زاده لطفی[۳]، داریوش اکبریان[۴]

۱-دکتری، گروه ریاضی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
۲- دانشیار، گروه ریاضی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
۳- استاد، گروه ریاضی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
۴- استادیار، گروه ریاضی، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران

رسید مقاله: ۱۰ فروردین ۱۳۹۹
پذیرش مقاله: ۱۷ شهریور ۱۳۹۹

چکیده

مطالعه نقاط اتکا با توجه به موقعیت استراتژیکی که در مجموعه امکان تولید (PPS) دارد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. آن‌ها متصل‌کننده‌ی بخش کارا و ناکارای مرز PPS در تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) هستند. در این مقاله نقاط اتکا به عنوان زیرمجموعه‌ای از مجموعه نقاط کارای راسی مجموعه امکان تولید مورد مطالعه قرار گرفته است. بدین منظور در این کار دو شرط لازم و کافی و دو شرط کافی برای شناسایی نقاط اتکا در مدل های BCC آورده شده است. از آنجا که یکی از کاربردهای این نقاط در مبحث بهبود پوششی می‌باشد، در برخی موارد شناسایی همه‌ی نقاط اتکا ضروری نیست، بنابراین شرایط ذکرشده در این مقاله برای رسیدن به این هدف راهگشا است.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، نقطه اتکا، مجموعه امکان تولید، مرز کارا و ناکارا.

۱ مقدمه

نخستین قدم‌ها در تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) به‌وسیله فارل [۱] و چارنز و همکاران [۲] برداشته شد. تحلیل پوششی داده‌ها یک تکنیک ناپارامتری و ابزار قدرتمندی برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) با چند ورودی و چند خروجی همگن می‌باشد [۳,۴] . در این تکنیک لزومی ندارد تابع تولید از پیش تعیین‌شده باشد. اولین مدل تحلیل پوششی داده‌ها توسط چارنز و همکاران [۲] برای بازده به مقیاس ثابت (CRS) مطرح شد و سپس به‌وسیله بنکر و همکاران [۵] برای حالت بازده به مقیاس متغیر (VRS) گسترش یافت.

یک نقطه اتکا در DEA یک واحد کارای راسی است [۶] به طوری که برخی از مولفه های ورودی آن می‌توانند افزایش یابند و/یا برخی از مولفه‌های خروجی آن می توانند کاهش یابند و DMU مجازی ساخته‌شده همچنان بر روی مرز مجموعه امکان تولید (PPS) باقی بماند. به عبارت دیگر، یک نقطه اتکا یک واحد راسی

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: mohsen_rostamy@yahoo.com

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]
[DOI: 10.22034/20.4.79]

مجموعه امکان تولید است به طوری که در این نقطه، از مرز کارا به بخش دسترسی آزاد مرز، انتقال انجام می‌شود. به‌علاوه لازم به ذکر است که نقاط اتکا در تحلیل پوششی داده‌ها نقش بسیار موثری را هم از نقطه نظر تئوری و هم نقطه نظر کاربردی بازی می‌کنند. اولین بار تاناسولیس و آلن [۷] مفهوم این نقاط را به منظور ساخت DMUهای مشاهده‌نشده و گسترش مرز کارای DEA به‌کار بردند. راز [۸] از این مفهوم به منظور شناسایی قیمت‌ها در خدمات مراقبتی درمانی استفاده کرد. همچنین این نقاط نقش موثری را در [۹] در معرفی DMUهای مشاهده‌نشده بازی می‌کنند. بوگنول و دولا [۱۰] روشی دیگر برای شناسایی آن‌ها بر پایه‌ی خصوصیات هندسی نقاط اتکا فراهم کردند. آنها بحث و بررسی خود را بر روی مجموعه امکان تولید با بازده به مقیاس متغیر انجام دادند. در روش آن ها PPS مدل BCC یکی پس از دیگری بر روی صفحات مختصات تصویر می‌شود، اکنون یک DMU کارای راسی یک نقطه اتکاست اگر و فقط اگر متعلق به مرز حداقل یکی از این تصاویر ساده باشد. مصطفایی و سلیمانی دامنه [۱۱] روشی را برای یافتن نقاط اتکا به کمک تکنیک تحلیل حساسیت پیشنهاد دادند و همچنین برخی شرایط برای شناسایی نقاط اتکا در [۱۲] ارایه دادند. بانی و همکاران [۱۳] روشی دیگر برای شناسایی این نقاط بر اساس یافتن ابرصفحه تکیه‌کننده ضعیف گذرنده از DMU کارای راسی مورد بررسی، معرفی کردند. به‌علاوه کارهای متفاوت دیگر با موارد اشاره‌شده بالا در محیط نامحدب و همچنین بهینه‌سازی چند هدفه نیز انجام شده است [۱۴,۱۵]. دیدن مراجع [۱۶,۱۷] نیز به جهت جزییات بیشتر خالی از لطف نیست.

دراین مقاله، دو شرط لازم و کافی به همراه دو شرط کافی برای شناسایی نقاط اتکا در تکنولوژی VRS بیان شده است. بهبود پوششی از جمله مفاهیمی است که از نقاط اتکا به منظور گسترش مرز کارای قوی استفاده می‌کند. این مفهوم مبتنی بر تعریف واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی مشاهده نشده‌ای می‌باشد که توسط تعدیل سطوح ورودی و خروجی واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی کارای مشاهده‌شده‌ی خاص (نقاط اتکا) ایجاد می‌گردند. بنابراین در بعضی موارد یافتن برخی از نقاط اتکا (نه همگی آن‌ها) برای این مقصود کافی است و بعضی از روش‌های ارایه‌شده در این کار از نقطه نظر کاهش محاسبات نسبت به روش‌های پیشین دارای مزیت است.

ادامه مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش دوم برخی پیشنیازها و مقدمات گفته شده است. بخش سوم به چهار زیر بخش تقسیم شده است. در دو زیر بخش ابتدایی دو شرط کافی و سپس در دو زیر بخش بعدی دو شرط لازم و کافی شرح داده می شود. بخش چهارم یک مثال کاربردی به جهت ارزیابی روش‌های ارایه‌شده و سپس در بخش پنجم نتایج مربوطه بیان شده است.

۲ پیش نیازها

فرض کنیم یک مجموعه شامل n تا DMU داریم به طوری که $DMU_j : j = ۱,\ldots,n$ ورودی‌های $x_j = (x_{۱j},\ldots,x_{mj}) \geq ۰$ را به منظور تولید خروجی‌های $y_j = (y_{۱j},\ldots,y_{sj}) \geq ۰$ مصرف می‌کنند. به‌علاوه نماد $(x_j, y_j)(j \in J = \{۱,\ldots,n\})$ برای DMUهای مشاهده‌شده به‌کار می‌رود که در آن اولین مولفه بردار ورودی و دومین مولفه بردار خروجی را نشان می‌دهد $((x_j, y_j) \neq ۰, \forall j \in J)$. مجموعه امکان تولید عبارت است از گردایه‌ی همه ترکیبات ورودی –خروجی ممکن که به صورت زیر تعریف می‌شود [۵,۱۸].

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.79]

$$T=\{(x,y)|\ x \text{ می‌تواند } y \text{ را تولید کند}\}$$

در صورتی که تکنولوژی دارای بازده به مقیاس متغیر باشد مدل تحت بررسی BCC خواهد بود و مجموعه امکان تولید آن به‌صورت زیر قابل بیان می‌باشد.

$$T_v=\left\{(x,y)\middle| x\geq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j, y\leq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1, \lambda_j\geq 0; j=1,\ldots,n\right\}$$

مدل BCC در فرم پوششی در ماهیت‌های ورودی و خروجی برای $DMU_k\ (k\in\{1,\ldots,n\})$ به ترتیب به صورت زیر می‌باشد.

(ورودی محور)

$$\begin{aligned}
Min\quad & \theta-\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m}s_i^- +\sum_{r=1}^{s}s_r^+\right)\\
s.t.\quad & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}+s_i^-=\theta x_{ik}, \qquad i=1,\ldots,m,\\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}-s_r^+=y_{rk}, \qquad r=1,\ldots,s,\\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1,\\
& \lambda_j\geq 0 \qquad j=1,\ldots,n,\\
& \theta \text{ is free}.
\end{aligned} \tag{۱}$$

(خروجی محور)

$$\begin{aligned}
Max\quad & \varphi+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m}t_i^- +\sum_{r=1}^{s}t_r^+\right)\\
s.t.\quad & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}+t_i^-=x_{ik}, \qquad i=1,\ldots,m,\\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}-t_r^+=\varphi y_{rk}, \qquad r=1,\ldots,s,\\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1,\\
& \lambda_j\geq 0 \qquad j=1,\ldots,n,\\
& \varphi \text{ is free}.
\end{aligned} \tag{۲}$$

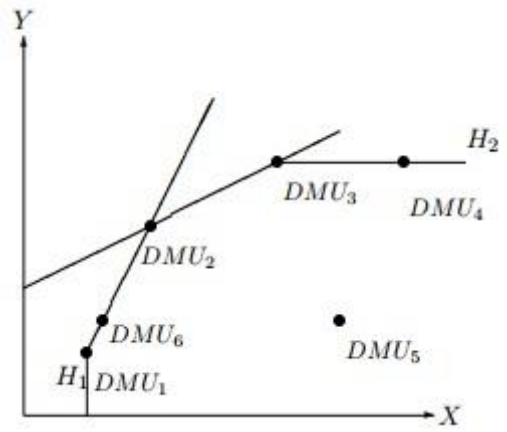
که ε یک عدد بسیار کوچک مثبت غیرارشمیدسی می‌باشد. دوآل مدل‌های فوق که به فرم مضربی شهرت دارند به صورت زیر بیان می‌شود (حالت $\varepsilon=0$).

$$\begin{aligned}
Max\quad & \sum_{r=1}^{s}u_r y_{rk}+u_0\\
s.t.\quad & \sum_{i=1}^{m}v_i x_{ik}=1,\\
& \sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}-\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}+u_0\leq 0, \qquad j=1,\ldots,n,\\
& u_r\geq 0, v_i\geq 0, \qquad r=1,\ldots,s, \quad i=1,\ldots,m,\\
& u_0 \text{ is free}.
\end{aligned} \tag{۳}$$

$$\begin{aligned}
Min\quad & \sum_{i=1}^{m}v_i x_{ik}-u_0\\
s.t.\quad & \sum_{r=1}^{s}u_r y_{rk}=1,\\
& -\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}+\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}-u_0\geq 0, \qquad j=1,\ldots,n,\\
& u_r\geq 0, v_i\geq 0, \qquad r=1,\ldots,s, \quad i=1,\ldots,m,\\
& u_0 \text{ is free}.
\end{aligned} \tag{۴}$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.79]



شکل ۱. DMU های راسی، غیرراسی و اتکا

تعریف ۱: DMU_k یک واحد کارای پارتو یا کارای قوی است اگر و فقط اگر حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

i) برای هر جواب بهینه مدل (۱) داشته باشیم[۱]: $\theta^* = ۱, (s^{+*}, s^{-*}) = (۰,۰)$.

ii) برای هر جواب بهینه مدل (۲) داشته باشیم: $\varphi^* = ۱, (t^{+*}, t^{-*}) = (۰,۰)$.

تعریف ۲: DMU_k یک واحد کارای ضعیف است اگر و فقط اگر حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

iii) جواب بهینه‌ای برای مدل (۱) وجود داشته باشد به طوری که: $\theta^* = ۱, (s^{+*}, s^{-*}) \neq (۰,۰)$.

iv) جواب بهینه‌ای برای مدل (۲) وجود داشته باشد به طوری که: $\varphi^* = ۱, (t^{+*}, t^{-*}) \neq (۰,۰)$.

قابل توجه است که اگر $\theta^* < ۱$ و $\varphi^* > ۱$ باشند آنگاه DMU_k یک نقطه درونی[۲] PPS خواهد بود.

واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی درونی و کارای ضعیف در مدل‌های BCC، DMU های ناکارا- BCC نامیده می‌شوند.

تعریف ۳: واحد کارای قوی DMU_k را کارای راسی می‌نامند هرگاه مدل‌های (۱) و (۲) جواب بهینه منحصر به‌فردی به صورت $\lambda_k^* > ۰, \lambda_j^* = ۰, j \in J - \{k\}$ داشته باشد. در غیر این صورت DMU_k کارای غیرراسی است.

از اینجا به بعد مجموعه DMU های ناکارا- BCC، کارای غیرراسی و کارای راسی در محیط با بازده به مقیاس متغیر، به ترتیب با نمادهای F، E و E^* نشان داده می‌شوند.

توجه ۱: DMU_k یک واحد کارای قوی نامیده می‌شود اگر و فقط اگر حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

v) برای حداقل یکی از جواب‌های بهینه (۳) داشته باشیم: $u^{*t} y_k + u_k^* = ۱, (u^{*t}, v^{*t}) > ۰$.

vi) برای حداقل یکی از جواب‌های بهینه (۴) داشته باشیم: $v^{*t} x_k + u_k^* = ۱, (u^{*t}, v^{*t}) > ۰$.

توجه ۲: DMU_k یک واحد کارای ضعیف نامیده می‌شود اگر و فقط اگر حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

---

[۱] (*) نشان‌دهنده‌ی جواب بهینه می‌باشد.

[۲] هرگاه درون T_V را با $\text{int } T_V$ نشان دهیم آنگاه $\text{int } T_V = \{(x,y) \in T_V \mid \exists \varepsilon > ۰; (x - \varepsilon e_۱, y + \varepsilon e_۲) \in T_V\}$ ($e_۱$ و $e_۲$ به ترتیب بردارهایی با ابعاد متناسب با ورودی‌ها و خروجی‌ها هستند که همه‌ی مولفه‌های آن ها برابر یک می‌باشد.)

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.79]

vii) برای همه‌ی جواب‌های بهینه (۳) داشته باشیم: $u^{*t}y_k + u_k^* = ۱, (u^{*t}, v^{*t}) \neq ۰$.

viii) برای همه‌ی جواب‌های بهینه (۴) داشته باشیم: $v^{*t}x_k + u_k^* = ۱, (u^{*t}, v^{*t}) \neq ۰$.

متناظر با هر DMU کارا- BCC به صورت $DMU_j = (x_{۱j}, \ldots, x_{mj}, y_{۱j}, \ldots, y_{sj})$ برای هر $\alpha, \gamma > 0$ واحدهای مجازی $DMU_j^l = (x_{۱j}, \ldots, x_{l\,j} + \alpha, \ldots, x_{mj}, y_{۱j}, \ldots, y_{sj})$ و $DMU_j^q = (x_{۱j}, \ldots, x_{mj}, y_{۱j}, \ldots, y_{q\,j} - \gamma, \ldots, y_{sj})$ را تعریف می‌کنیم. این DMUهای مجازی، یا نقطه‌ای درون PPS مدل BCC هستند و یا بر روی برخی از رویه های دسترسی آزاد (رویه های نامتناهی) قرار دارند. در حالت دوم این DMUهای مجازی را "واحدهای مجازی کارای ضعیف" می‌نامیم و با نماد $WEV\ DMU$ نمایش می‌دهیم. بنابراین از اینجا به بعد می‌توان گفت $WEV\ DMU_j^l (DMU_j^q)$ بر روی رویه‌ی نامتناهی با $(u_q = ۰) v_l = ۰$ قرار دارد. به همین منظور اگر DMU_j و $DMU_j^l (DMU_j^q)$ بر روی یک ابرصفحه مشابه واقع باشند، آنگاه می‌گوییم $\bar{u}y - \bar{v}x + \bar{u}_۰ = ۰$ و $(\bar{u}_q = ۰) \bar{v}_l = ۰$. درشکل۲، $D\ \ M$ کارا- BCC $D_۲ = (x_{۱۲}, x_{۲۲}, y_{۱۲})$ و $WEV\ DMU\ D_۲' = (x_{۱۲} + \alpha, x_{۲۲}, y_{۱۲})$ بر روی ابرصفحه(ها) ی مشابه قرار دارند و بنابراین $\bar{v}_۱ = ۰$. همچنین واحد راسی $D_۱ = (x_{۱۱}, x_{۲۱}, y_{۱۱})$ و $WEV\ DMU\ D_۱'' = (x_{۱۱}, x_{۲۱}, y_{۱۱} - \gamma)$ بر روی ابرصفحه(ها)ی مشابه قرار دارند پس بنابراین $\bar{u}_۱ = ۰$.

تعریف ٤: ابرصفحه‌ی سازای $H = \{(x, y) | \bar{u}^t y - \bar{v}^t x = \bar{u}_۰, (\bar{u}, \bar{v}) \geq ۰, (\bar{u}, \bar{v}) \neq ۰\}$ از مجموعه امکان تولید T_v یک ابرصفحه‌ی سازای ضعیف است اگر و فقط اگر تکیه‌کننده باشد و حداقل $m+s$ تا از DMUهای کارای راسی و مجازی کارای ضعیف از PPS بر روی H واقع باشند. (در این حالت حداقل یکی از مولفه‌های بردار گرادیان ابرصفحه مساوی صفر است).

در شکل ۱ ابرصفحه‌های $H_۱$ و $H_۲$ سازای ضعیف هستند.

بوگنول و دولا (۲۰۰۹) واحدهای تصمیم‌گیرنده اتکا را به صورت زیر تعریف کردند [۱۰].

تعریف ۵: $DMU_k \in E^*$ یک نقطه اتکاست هرگاه به یک رویه نامتناهی PPS مدل BCC متعلق باشد.

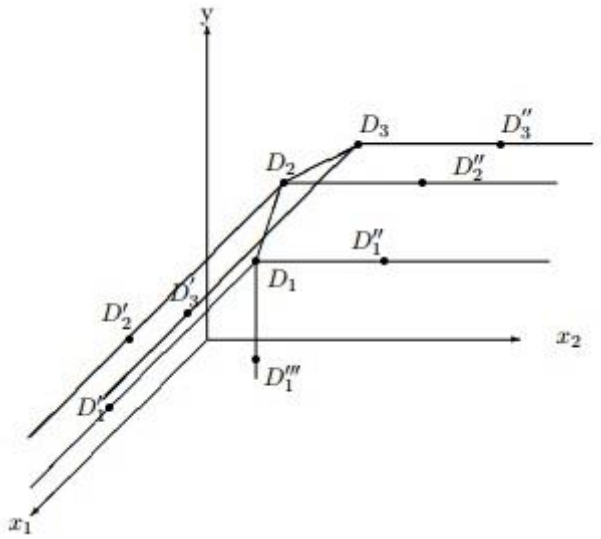
تبصره ۱: با توجه به تعریف نقطه اتکا به وضوح دیده می‌شود $DMU_k \in E^*$ یک واحد اتکاست اگر و فقط اگر وجود داشته باشد حداقل یک l(یا q) به طوری که DMU_k^l (یا DMU_k^q)، $WEV\ DMU$ باشد(به عبارتی $\bar{v}_l = ۰$ (یا $\bar{u}_q = ۰$)).

همچنین بوگنول و دولا (۲۰۰۹) در *Result 1*، نقطه اتکا را به شکل دیگری به صورت زیر تعریف کردند [۱۰].

تبصره ۲: $DMU_k \in E^*$ یک نقطه اتکا نامیده می‌شود اگر و فقط اگر آن متعلق باشد به ابرصفحه تکیه کننده بر T_v مانند $H_{(u,v,u_۰)}$ به طوری که حداقل یکی از مولفه‌های بردار گرادیان (u, v) برابر صفر باشد.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.79]



شکل ۲. D_1، D_2 و D_3 نقاط اتکا هستند.

در شکل ۱، DMU_1 و DMU_3 واحدهای اتکا هستند. آنها بر روی رویه‌های نامتناهی به ترتیب با $\bar{u}=0$ و $\bar{v}=0$ قرار دارند. همچنین در شکل ۲ D_1، D_2 و D_3 واحدهای اتکا هستند. D_1 بر روی سه رویه نامتناهی با $\bar{v}_1=0$، $\bar{v}_2=0$ و $\bar{u}=0$ قرار دارد. D_2 بر روی دو رویه نامتناهی با $\bar{v}_1=0$ و $\bar{v}_2=0$ واقع می‌باشد. همچنین D_3 بر روی دو رویه نامتناهی با $\bar{v}_1=0$ و $\bar{v}_2=0$ قرار دارد.

۳ شناسایی نقاط اتکای مجموعه امکان تولید مدل BCC

در چهار زیر بخش پیشرو مهم‌ترین نتایج به‌دست آمده در یافتن نقاط اتکا در محیطی با بازده به مقیاس متغیر بیان می‌شود. در دو زیر بخش ابتدایی، دو شرط کافی و بعد از آن دو شرط لازم و کافی آورده شده است.

۳-۱ یافتن نقاط اتکا به کمک مدل‌های ابرکارایی

در این زیر بخش، شناسایی DMUهای اتکا را با استفاده از مدل‌های ابرکارایی به صورت زیر مطرح می‌کنیم. ابتدا، به کمک مدل‌های مربوطه، $DMU_k\ (k\in J)$ را ارزیابی می‌کنیم. سپس همه‌ی DMUهای کارا- BCC را نگه داشته و دیگر DMUها را حذف می‌کنیم. فرض کنید مجموعه‌ی همه‌ی DMUهای کارا- BCC به صورت $E'(=E\cup E^*)$ نمایش داده شود. متناظر با هر $(k\in E')DMU_k=(x_{1k},\ldots,x_{mk},y_{1k},\ldots,y_{sk})$، مدل‌های زیر را حل می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
Min\quad & \theta_l^k-\varepsilon\Big(\sum_{i=1}^{m}s_i^-+\sum_{r=1}^{s}s_r^+\Big)\\
s.t.\quad & \sum_{j\in E'-\{k\}}\lambda_j^k x_{lj}+s_l^-=\theta_l^k x_{lk},\\
& \sum_{j\in E'-\{k\}}\lambda_j^k x_{ij}+s_i^-=x_{ik}, \qquad i=1,\ldots,m, i\neq l,\\
& \sum_{j\in E'-\{k\}}\lambda_j^k y_{rj}-s_r^+=y_{rk}, \qquad r=1,\ldots,s,\\
& \sum_{j\in E'-\{k\}}\lambda_j^k=1,\\
& \lambda_j^k\geq 0, s_i^-, s_r^+\geq 0, \qquad \forall j\in E'-\{k\},\forall i,\forall r,\\
& \theta_l^k \text{ is free},
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.79]

برای $l \in \{1,\ldots,m\}$.

$$
\begin{aligned}
Max \quad & \varphi_q^k + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} t_i^- + \sum_{r=1}^{s} t_r^+\right) \\
s.t. \quad & \sum_{j \in E'-\{k\}} \mu_j^k x_{ij} + t_i^- = x_{ik}, \qquad i = 1,\ldots,m, \\
& \sum_{j \in E'-\{k\}} \mu_j^k y_{qj} - t_q^+ = \varphi_q^k y_{qk}, \\
& \sum_{j \in E'-\{k\}} \mu_j^k y_{rj} - t_r^+ = y_{rk}, \qquad r = 1,\ldots,s, r \neq q, \\
& \sum_{j \in E'-\{k\}} \mu_j^k = 1, \\
& \mu_j^k \geq 0, t_i^-, t_r^+ \geq 0, \qquad \forall j \in E'-\{k\}, \forall i, \forall r, \\
& \varphi_q^k \ is \ free,
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

برای $q \in \{1,\ldots,s\}$.

قضایای زیر برای مدل‌های (۵) و (۶) برقرارند. قضیه (۲) یک شرط کافی برای یافتن DMUهای اتکا فراهم می‌کند.

قضیه ۱: DMU_k یک واحد کارا- BCC است اگر و فقط اگر برای هر l (یا q) یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

الف) مدل (۵) (یا مدل (۶)) نشدنی باشد.

ب) $\theta_l^{k*} \geq 1$ (یا $\varphi_q^{k*} \leq 1$).

برهان.

(فقط اگر). فرض کنید DMU_k یک واحد کارا- BCC می‌باشد که برای برخی l مدل (۵) شدنی است. اکنون نشان می دهیم $\theta_l^{k*} \geq 1$. مدل زیر را برای DMU_k در نظر بگیریم.

$$
\begin{aligned}
Min \quad & \theta_l'^k - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right) \\
s.t. \quad & \sum_{j \in E'} \lambda_j^k x_{lj} + s_l^- = \theta_l'^k x_{lk}, \\
& \sum_{j \in E'} \lambda_j^k x_{ij} + s_i^- = x_{ik}, \qquad i = 1,\ldots,m, i \neq l, \\
& \sum_{j \in E'} \lambda_j^k y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \qquad r = 1,\ldots,s, \\
& \sum_{j \in E'} \lambda_j^k = 1, \\
& \lambda_j^k \geq 0, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \qquad \forall j \in E', \forall i, \forall r, \\
& \theta_l'^k \ is \ free,
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

برای $l \in \{1,\ldots,m\}$.

حال فرض کنید (θ^{k*} (=۱)، $\theta_l'^{k*}$ و θ_l^{k*} مقدار توابع هدف بهینه‌ی به ترتیب مدل‌های (۱)، (۷) و (۵) برای DMU_k باشند. به آسانی دیده می‌شود که $\theta^{k*} \leq \theta_l'^{k*} \leq \theta_l^{k*}$. بدین ترتیب داریم $\theta_l^{k*} \geq 1$.

(اگر). برای اثبات قسمت "اگر"، می‌تواند از نامساوی $\theta_l^{k*} \leq \theta^* \leq 1$ ($\varphi_q^{k*} \geq \varphi^* \geq 1$) استفاده شود و از آوردن جزئیات خودداری می‌کنیم.

■

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.79]

قضیه ۲: اگر برای حداقل یک l(یا q)، مدل (۵) (یا مدل (۶)) نشدنی شود آن گاه DMU_k یک واحد اتکا می‌باشد.

برهان: فرض کنید برای حداقل یک l، مدل (۵) نشدنی باشد. ابتدا نشان می‌دهیم $DMU_k \in E^*$. به برهان خلف فرض کنید $DMU_k \in E \setminus E^*$. بنابراین واحدهای حقیقی یا مجازی $DMU_p = (x_p, y_p)$ و $DMU_q = (x_q, y_q)$ وجود دارد به طوری که

$$DMU_k = \bar{\lambda} DMU_p + \bar{\mu} DMU_q \qquad (*)$$

برای یک $\bar{\lambda} > 0$ و $\bar{\mu} > 0$ و $\bar{\lambda} + \bar{\mu} = 1$.

باجایگذاری (*) در (۵) به جای DMU_k، می‌توان یک جواب شدنی برای مدل (۵) پیدا کرد که این یک تناقض است. بنابراین، $DMU_k \in E^*$.

اکنون نشان می‌دهیم DMU_k برروی ابرصفحه(ها)ی سازای ضعیف (رویه نامتناهی) قرار دارد که موازی با l امین محور ورودی است.

در نظر بگیرید واحد مجازی DMU'_k که به صورت زیر است.

$$DMU'_k = (x_{1k}, \ldots, x_{lk} + \alpha, \ldots, x_{mk}, y_{1k}, \ldots, y_{sk})$$

که $\alpha > 0$ است. کافی است نشان دهیم که DMU'_k یک واحد کارای ضعیف خروجی محور مدل BCC است. مدل زیر را برای DMU'_k در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} Max \quad & \varphi \\ s.t. \quad & \sum_{j \in E'} \lambda_j x_{lj} + \mu_k (x_{lk} + \alpha) \le x_{lk} + \alpha, \qquad (8) \\ & \sum_{j \in E'} \lambda_j x_{ij} + \mu_k x_{ik} \le x_{ik}, \qquad i = 1, \ldots, m, i \ne l, \\ & \sum_{j \in E'} \lambda_j y_{rj} + \mu_k y_{rk} \ge \varphi y_{rk}, \qquad r = 1, \ldots, s, \\ & \sum_{j \in E'} \lambda_j + \mu_k = 1, \\ & \lambda_j \ge 0, \mu_k \ge 0, \qquad \forall j \in E', \\ & \varphi \text{ is free}. \end{aligned}$$

فرض کنید $(\lambda_j^* (j = 1, \ldots, n), \mu_k^*, \varphi^*)$ یک جواب بهینه مدل فوق باشد. باید نشان دهیم $\varphi^* = 1$. به برهان خلف، فرض کنیم $\varphi^* > 1$، بنابراین داریم:

$$\sum_{j \in E'} \lambda_j^* y_{rj} + \mu_k^* y_{rk} = \sum_{j \in E' - \{k\}} \lambda_j^* y_{rj} + (\lambda_k^* + \mu_k^*) y_{rk} \ge \varphi^* y_{rk} > y_{rk}, \; r = 1, \ldots, s,$$

بنابراین $(\lambda_j^* = 0 (j = 1, \ldots, n, j \ne k), \mu_k^* + \lambda_k^* = 1)$ نمی‌تواند جواب بهینه مدل (۸) باشد. در نتیجه، $\mu_k^* + \lambda_k^* < 1$ و $\mu_k^* \ne 1$.

بدین ترتیب می‌تواند محدودیت‌های مدل (۸) به صورت زیر نوشته شود:

$$\sum_{j \in E' - \{k\}} \lambda_j^* x_{lj} \le (1 - \mu_k^* - \lambda_k^*) x_{lk} + (1 - \mu_k^*) \alpha, \qquad (9)$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.79]

$$\sum_{j\in E'-\{k\}}\lambda_j^* x_{ij} \le (1-\mu_k^*-\lambda_k^*)x_{ik}, \qquad i=1,\dots,m, i\neq k,$$
$$\sum_{j\in E'-\{k\}}\lambda_j^* y_{rj} > (1-\mu_k^*-\lambda_k^*)y_{rk}, \qquad r=1,\dots,s,$$
$$\sum_{j\in E'-\{k\}}\lambda_j^* = 1-\mu_k^*-\lambda_k^*,$$

با تقسیم طرف دوم مدل (۹) بر $1-\mu_k^*-\lambda_k^*$ و تعریف $(j\in E'-\{k\})\bar{\mu}_j = \frac{\lambda_j^*}{1-\mu_k^*-\lambda_k^*}$، بنابراین مدل (۹) به صورت زیر خواهد شد.

$$\sum_{j\in E'-\{k\}}\bar{\mu}_j x_{lj} \le x_{lk}+\beta, \qquad (10)$$
$$\sum_{j\in E'-\{k\}}\bar{\mu}_j x_{ij} \le x_{ik}, \qquad i=1,\dots,m, i\neq l,$$
$$\sum_{j\in E'-\{k\}}\bar{\mu}_j y_{rj} > y_{rk}, \qquad r=1,\dots,s,$$
$$\sum_{j\in E'-\{k\}}\bar{\mu}_j = 1,$$

که $\beta = (\frac{1-\mu_k^*}{1-\mu_k^*-\lambda_k^*})\alpha$. از آنجا که $\beta>0$ آن گاه وجود دارد $\hat{\theta}>1$ به طوری که $x_{lk}+\beta = \hat{\theta}x_{lk}$، بنابراین داریم: $\sum_{j\in E'-\{k\}}\bar{\mu}_j x_{lj} \le \hat{\theta}x_{lk}$.

پس، محدودیت‌های مدل (۹) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$\sum_{j\in E'-\{k\}}\bar{\mu}_j x_{lj} \le \hat{\theta}x_{lk}, \qquad (11)$$
$$\sum_{j\in E'-\{k\}}\bar{\mu}_j x_{ij} \le x_{ik}, \qquad i=1,\dots,m, i\neq l,$$
$$\sum_{j\in E'-\{k\}}\bar{\mu}_j y_{rj} > y_{rk}, \qquad r=1,\dots,s,$$
$$\sum_{j\in E'-\{k\}}\bar{\mu}_j = 1,$$
$$\bar{\mu}_j \ge 0, \qquad j\in E'-\{k\},$$

بنابراین، $(\bar{\mu}_j\,(j\in E'-\{k\}),\hat{\theta})$ یک جواب شدنی برای مدل (۵) می‌باشد و این یک تناقض است. بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم $\varphi^*=1$. از طرف دیگر DMU_k' به‌وسیله DMU_k مغلوب می‌شود. بنابراین DMU_k' یک واحد کارای ضعیف است. پس، DMU_k بر روی ابرصفحه‌ی سازای ضعیف موازی با lامین محور ورودی قرار دارد. در حالتی که برای حداقل یک q، مدل (۶) نشدنی شود، اثبات به طور مشابه قابل بیان است.

■

۳-۲ شناسایی نقاط اتکا به کمک u_0

در این زیر بخش، می‌توان به کمک u_0 به یک شرط کافی برای شناسایی نقاط اتکای تکنولوژی VRS رسید. بدین منظور دو مدل زیر را در نظر بگیرید.

$$u_0^{In} = \quad Max \quad u_0$$
$$s.t. \quad \sum_{r=1}^{s}u_r y_{rk} + u_0 = 1, \qquad (a)$$
$$\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij} + u_0 \le 0, \qquad j=1,\dots,n, \qquad (12)$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.79]

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1, \\
&u_r \geq 0, v_i \geq 0, \quad r = 1,\ldots,s, \quad i = 1,\ldots,m, \\
&u_0 \text{ is free}, \\
u_0^{out} = \quad &Max \quad u_0 \\
s.t. \quad &\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} = 1, \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - u_0 \leq 0, \quad j = 1,\ldots,n, \\
&\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} + u_0 = 1, \\
&u_r \geq 0, v_i \geq 0, \quad r = 1,\ldots,s, \quad i = 1,\ldots,m, \\
&u_0 \text{ is free}.
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

قضیه زیر یک شرط کافی برای تشخیص اتکا بودن واحد تحت بررسی DMU_k ارایه می‌دهد.

قضیه ۳: فرض کنید $DMU_k \in E^*$ واحد تحت ارزیابی باشد. اگر حداقل یکی از مدل های (۱۲) یا (۱۳) مقدار بهینه برابر ۱ داشته باشد، آن‌گاه DMU_k یک واحد اتکاست.

برهان: فرض کنید مدل (۱۲) دارای مقدار بهینه $u_0^{In*} = 1$ باشد. در این صورت با توجه به محدودیت (a) در این مدل، در جواب بهینه داریم، $u^* y_k = 0$. از آنجایی‌که همه‌ی مولفه‌های y_k صفر نیستند و همچنین $\begin{cases} u^* \geq 0 \\ y_k \geq 0 \end{cases}$، پس حداقل یکی از مولفه‌های u^* لزوماً صفر خواهد بود. در این صورت ابرصفحه‌ی تکیه‌کننده‌ای به‌دست می‌آید که حداقل یکی از مولفه‌های بردار نرمال آن صفر است و از DMU_k نیز می‌گذرد. پس DMU_k یک نقطه اتکاست.

■

۳-۳ یک شرط لازم و کافی برای نقاط اتکا در T_v

در مدل‌های برنامه‌ریزی خطی اگر بدانیم در جواب بهینه، هر یک از متغیر های تصمیم چه مقداری را می‌گیرند، می‌توان از ابتدا همان مقدار را به متغیر تصمیم اختصاص داد و به عنوان یکی از محدودیت‌ها در قیود مساله قرار گیرد. بنابراین دستگاه‌های زیر برای تشخیص اتکا بودن $DMU_k = (x_k, y_k) \in E^*$ ارایه می‌شوند.

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + u_0 \leq 0, \quad j = 1,\ldots,n, j \neq k, \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} + u_0 = 0, \\
&v_t = 0, \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r + \sum_{i=1}^{m} v_i = 1, \\
&u_r \geq 0, v_i \geq 0, \quad r = 1,\ldots,s, \quad i = 1,\ldots,m, \\
&u_0 \text{ is free},
\end{aligned} \tag{۱۴}$$

برای هر $t \in \{1,\ldots,m\}$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + u_0 \leq 0, \quad j = 1,\ldots,n, j \neq k, \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik} + u_0 = 0,
\end{aligned} \tag{۱۵}$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.79]

$$
\begin{aligned}
& u_l = ۰, \\
& \sum_{r=۱}^{s} u_r + \sum_{i=۱}^{m} v_i = ۱, \\
& u_r \geq ۰, v_i \geq ۰, \qquad r = ۱,\ldots,s, \quad i = ۱,\ldots,m, \\
& u_. \ is \ free,
\end{aligned}
$$

برای هر $l \in \{۱,\ldots,s\}$.

در دستگاه‌های فوق محدودیت $\sum_{r=۱}^{s} u_r + \sum_{i=۱}^{m} v_i = ۱$ به جهت نرمالسازی بردار گرادیان به‌دست آمده برای ساختن ابرصفحه‌ی تکیه‌کننده می‌باشد.

قضیه ٤: $DMU_k = (x_k, y_k) \in E^*$ یک نقطه اتکا است اگر و فقط اگر حداقل یکی از دستگاه های (۱۴) یا (۱۵) شدنی باشند.

برهان: بدون این‌که به کلیت مساله خللی وارد شود، فرض کنید به ازای یک $t \in \{۱,\ldots,m\}$، دستگاه tام (۱۴) شدنی باشد. بنابراین بردار $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{u}_.)$ وجود دارد که در دستگاه (۱۴) صدق می‌کند. یعنی داریم:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{r=۱}^{s} \bar{u}_r y_{rj} - \sum_{i=۱}^{m} \bar{v}_i x_{ij} + \bar{u}_. \leq ۰, \qquad j = ۱,\ldots,n, j \neq k, \\
& \sum_{r=۱}^{s} \bar{u}_r y_{rk} - \sum_{i=۱}^{m} \bar{v}_i x_{ik} + \bar{u}_. = ۰, \\
& \bar{v}_t = ۰, \\
& \sum_{r=۱}^{s} \bar{u}_r + \sum_{i=۱}^{m} \bar{v}_i = ۱, \\
& \bar{u}_r \geq ۰, \bar{v}_i \geq ۰, \qquad r = ۱,\ldots,s, \quad i = ۱,\ldots,m, \\
& \bar{u}_. \ is \ free,
\end{aligned}
$$

و با توجه به نحوه ساخته شدن T_v، به ازای هر $(x,y) \in T_v$ دلخواه داریم: $\bar{u}y - \bar{v}x + \bar{u}_. \leq ۰$. بنابراین ابرصفحه‌ی $\bar{H} = \{(x,y) | \bar{u}y - \bar{v}x + \bar{u}_. = ۰\}$ تکیه‌کننده بر T_v در (x_k, y_k) است و مولفه ی tام بردار v آن برابر صفر می‌باشد. در نتیجه واحد تحت ارزیابی یک نقطه‌ی اتکا است. اثبات عکس آن نیز واضح است که از آوردن آن صرف نظر می‌شود.

■

۳-٤ یافتن نقاط اتکا به کمک مجموعه مرجع

در این زیر بخش، با استفاده از مجموعه مرجع، نقاط اتکا در تکنولوژی VRS شناسایی می‌شوند. برای رسیدن به این هدف، مختصر آشوب روی $DMU_k = (x_k, y_k) \in E^*$ به صورت زیر انجام می‌دهیم.(E^* مجموعه واحدهای کارای راسی)

$$
\begin{aligned}
& DMU_k = (x_{۱k}, \ldots, x_{mk}, y_{۱k}, \ldots, y_{sk}) \\
& \qquad \downarrow \\
& DMU_k^{\varepsilon} = (x_{۱k} + \varepsilon, \ldots, x_{mk} + \varepsilon, y_{۱k} - \varepsilon, \ldots, y_{sk} - \varepsilon)
\end{aligned}
$$

که در آن $\varepsilon > ۰$ و به اندازه کافی کوچک است. هم اکنون واحد مجازی ساخته‌شده DMU_k^{ε} به کمک مدل‌های زیر مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.79]

$$
\begin{aligned}
&Min \quad \theta^t \\
&s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{tj} \le \theta^t (x_{tk} + \varepsilon), \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le x_{ik} + \varepsilon, \qquad i = 1,\dots,m, i \ne t, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{rk} - \varepsilon, \qquad r = 1,\dots,s, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
&\quad \lambda_j \ge 0 \qquad j = 1,\dots,n,
\end{aligned}
\tag{۱۶}
$$

برای هر $t \in \{1,\dots,m\}$.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \varphi^l \\
&s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le x_{ik} + \varepsilon, \qquad i = 1,\dots,m, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{lj} \ge \varphi^l (y_{lk} - \varepsilon), \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{rk} - \varepsilon, \qquad r = 1,\dots,s, r \ne l, \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
&\quad \lambda_j \ge 0 \qquad j = 1,\dots,n,
\end{aligned}
\tag{۱۷}
$$

برای هر $l \in \{1,\dots,s\}$.

در هر یک از مدل‌های فوق واحد مجازی ساخته‌شده (DMU_k^{ε}) موازی با tامین محور ورودی یا lامین محور خروجی بر روی مرز مجموعه امکان تولید تصویر می‌شود و لازم به ذکر است که این واحد تصویرشده با DMU_k بر روی یک ابرصفحه واقع هستند. اکنون DMU_k^{ε} توسط مدل‌های (۱۶) و (۱۷) مورد ارزیابی قرار می‌گیرد و در هر مرحله با تشکیل مجموعه مرجع می‌توان در مورد اتکا بودن DMU تحت بررسی تصمیم گرفت.

قضیه ۵: $DMU_k \in E^*$ یک نقطه اتکاست اگر و فقط اگر وجود داشته باشد حداقل یک $t \in \{1,\dots,m\}$ (یا $l \in \{1,\dots,s\}$) که در ارزیابی DMU_k^{ε} به کمک مدل (۱۶) (یا مدل (۱۷)) تعداد اعضای مجموعه مرجع کمتر از $m+s$ تا باشد.

برهان: بدون این‌که به کلیت مساله خللی وارد شود فرض کنید به‌ازای یک $t \in \{1,\dots,m\}$، واحد DMU_k^{ε} به کمک مدل (۱۶) ارزیابی شود و تعداد اعضای مجموعه مرجع کمتر از $m+s$ تا باشد آن‌گاه این بدین معنی است که تصویر DMU_k^{ε} بر روی مرز PPS، روی یک ابرصفحه‌ی سازای ضعیف قرار می‌گیرد که این ابرصفحه از DMU_k نیز می‌گذرد. بنابراین واحد تحت ارزیابی (DMU_k) یک نقطه اتکا است. عکس قضیه سرراست است و از آوردن آن صرف نظر می‌شود.

■

تذکر ۱: لازم است ذکر گردد، برای واحد تحت ارزیابی $DMU_k \in E^*$، ممکن است حل کلیه مدل‌های (۱۶) و (۱۷) ضروری نباشد، بلکه چنانچه در هر مرحله‌ای با تشکیل مجموعه‌ی مرجع تعداد اعضای آن مجموعه کمتر از $m+s$ گردد در همان مرحله متوقف می‌شویم و واحد تحت بررسی یک نقطه اتکا است.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.79]

در بخش بعدی به جهت درک بهتر روش‌های بیان‌شده، همچنین بررسی نتایج بین آن‌ها یک مثال کاربردی بر اساس داده‌های حقیقی ارایه می‌گردد.

٤ مثال عددی (داده‌های تجربی)

داده‌های حقیقی جدول ۱ برای ۱۷ دانشکده دانشگاه را در نظر بگیرید. این مجموعه داده‌ها برگرفته از تحقیق انجام‌شده در دانشگاه آزاد اسلامی واحد مبارکه می‌باشد [۱۹]. واحدهای تصمیم‌گیرنده با صرف دو ورودی اقدام به تولید دو خروجی می‌کنند و به شرح زیر است: تعداد دانشجویان کارشناسی (x_1)، تعداد اعضای هیات علمی تمام‌وقت و نیمه‌وقت (x_2)، تعداد فارغ التحصیلان (y_1)، تعداد مقالات تحقیقاتی (y_2). به وضوح می‌توان بررسی کردکه واحدهای راسی عبارتند از $\{D_1, D_2, D_3, D_7, D_8, D_{10}, D_{12}, D_{13}\}$ و سایر DMUها غیرراسی هستند از این رو مدل‌های پیشنهادی بر روی این DMUها مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. در جدول ۱ ستون‌های ۹-۶ نتیجه تحقیق بر اساس قضیه ۲ برای هر واحد تصمیم‌گیرنده راسی، مشاهده می‌شود و از آنجا که در هر سطر حداقل یکی از مدل‌های (۵) یا (۶) نشدنی است پس همه‌ی واحدهای راسی، نقاط اتکا می‌باشند.

جدول ۱. نتایج مربوط به قضایای ۲ و ۳ به‌علاوه داده‌های مربوط به مثال عددی

DMU	x_1	x_2	y_1	y_2	$l=1$	$l=2$	$q=1$	$q=2$	u_0^{In}	u_0^{out}
D_1	۲۶	۷	۱۲	۳	شدنی	نشدنی	نشدنی	نشدنی	۱	-۰/۳۷۱
D_2	۲۹	۶	۱۰	۷	نشدنی	نشدنی	نشدنی	نشدنی	۱	۰/۸۶۰
D_3	۴۰	۸	۲۰	۶	شدنی	نشدنی	شدنی	شدنی	۰/۱۷۸	-۰/۱۷۶
D_4	۴۲	۷	۱۲	۶	-	-	-	-	-	-
D_5	۴۵	۹	۱۸	۶	-	-	-	-	-	-
D_6	۹۲	۱۲	۴۰	۲	-	-	-	-	-	-
D_7	۸۳	۱۱	۵۸	۳	نشدنی	نشدنی	شدنی	نشدنی	۰/۴۵۰	۰/۶۲۴
D_8	۸۷	۱۴	۵۲	۷	شدنی	نشدنی	شدنی	شدنی	-۰/۷۲۵	۰/۵۵۵
D_9	۱۴۹	۱۶	۶۱	۴	-	-	-	-	-	-
D_{10}	۱۷۷	۱۷	۵۴	۱۲	شدنی	نشدنی	نشدنی	شدنی	-۰/۰۹۰	۱
D_{11}	۱۹۱	۱۹	۶۱	۱۱	-	-	-	-	-	-
D_{12}	۱۸۵	۱۴	۷۳	۴	نشدنی	شدنی	شدنی	نشدنی	-۰/۰۰۳	۰/۶۱۶
D_{13}	۱۸۶	۲۰	۸۵	۱۰	نشدنی	نشدنی	شدنی	نشدنی	-۰/۰۱۶	۱
D_{14}	۷۴	۱۲	۳۶	۵	-	-	-	-	-	-
D_{15}	۱۶۴	۲۲	۶۹	۸	-	-	-	-	-	-
D_{16}	۲۲۵	۲۰	۸۰	۵	-	-	-	-	-	-
D_{17}	۱۰۸	۱۰	۲۷	۳	-	-	-	-	-	-

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.79]

ستون‌های ۱۱-۱۰ خروجی‌ها بر طبق قضیه ۳ را بیان می‌کنند که واحدهای $\{D_1, D_2, D_{10}, D_{13}\}$ به عنوان اتکا معرفی می‌شوند. نتایج مربوط به دو شرط لازم و کافی موجود در این مقاله در جدول ۲ دیده می‌شود. ستون‌های ۵-۲ بر اساس قضیه ۴ و ستون‌های ۹-۶ خروجی‌ها بر طبق قضیه ۵ را بیان می‌کنند و اعداد ذکرشده در این جدول تعداد اعضای مجموعه مرجع را نشان می‌دهند. بر طبق جدول ۲ نیز تمامی واحدهای راسی نقاط اتکا هستند.

جدول ۲. نتایج مربوط به قضایای ۴ و ۵ در مثال عددی

DMU	$v_1=0$	$v_2=0$	$u_1=0$	$u_2=0$	$t=1$	$t=2$	$l=1$	$l=2$
D_1	نشدنی	شدنی	شدنی	شدنی	۱	۲	۲	۲
D_2	شدنی	شدنی	شدنی	شدنی	۲	۱	۳	۲
D_3	نشدنی	شدنی	نشدنی	نشدنی	۳	۲	۳	۳
D_4	-	-	-	-	-	-	-	-
D_5	-	-	-	-	-	-	-	-
D_6	-	-	-	-	-	-	-	-
D_7	شدنی	شدنی	نشدنی	شدنی	۲	۲	۲	۳
D_8	نشدنی	شدنی	نشدنی	نشدنی	۲	۴	۳	۳
D_9	-	-	-	-	-	-	-	-
D_{10}	شدنی	شدنی	شدنی	نشدنی	۳	۳	۳	۱
D_{11}	-	-	-	-	-	-	-	-
D_{12}	شدنی	نشدنی	نشدنی	شدنی	۳	۲	۲	۳
D_{13}	شدنی	شدنی	نشدنی	شدنی	۲	۲	۱	۲
D_{14}	-	-	-	-	-	-	-	-
D_{15}	-	-	-	-	-	-	-	-
D_{16}	-	-	-	-	-	-	-	-
D_{17}	-	-	-	-	-	-	-	-

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

مطالعه بر روی نقاط مرزی مجموعه امکان تولید در تحلیل پوششی داده‌ها از اهمیت زیادی برخوردار است. در این بین در سال‌های اخیر به نقاط اتکا به عنوان زیرمجموعه‌ای از نقاط کارای راسی، با توجه به موقعیت مهمی که دارند به صورت ویژه پرداخته شده است. اولین بار تاناسولیس و آلن [۷] مفهوم این نقاط را به منظور ساخت *DMU*های مشاهده‌نشده و گسترش مرز کارای *DEA* به‌کار بردند. یکی از کاربردهای این نقاط در مبحث بهبود

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.79]

پوششی می‌باشد که در برخی موارد لازم نیست تمامی نقاط اتکا شناسایی شوند. در نتیجه یافتن برخی از این نقاط بدین منظور کافی است و شرایط ذکرشده در اینجا برای رسیدن به این هدف راهگشا است. دراین کار، دو شرط لازم و کافی به همراه دو شرط کافی برای شناسایی نقاط اتکا در تکنولوژی *VRS* بیان شده است و لازم به ذکر است بعضی از این روش‌ها از نقطه نظر کاهش محاسبات نسبت به روش های پیشین دارای مزیت است. همچنین تعریف، توصیف و شناسایی نقاط اتکا در محیط‌های نادقیق (*DEA* با داده‌های فازی و بازه‌ای، ببینید [۲۰-۲۹]) می‌تواند جهت‌دهی موثری را برای مطالعات و تحقیقات آینده به ما بدهد.

منابع

[1] Farrell, M.J., (1957). The measurement of productive efficiency. Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 120(3), 253-290.

[2] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2(6), 429-444.

[3] Cooper, W.W., Seiford, L.M., Tone, K., (2007). Data envelopment analysis: A comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software (2nd ed.): Springer.

[4] Emrouznejad, A., Parker, B., Tavares, G., (2008). Evaluation of research in efficiency and productivity: A thirty years survey of the scholarly literature in DEA. Socio-Economic Planning Sciences, 42(3), 151-157.

[5] Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W., (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management Science, 30(9), 1078-1092.

[6] Charnes, A., Cooper, W.W., Thrall, R.M., (1991). A structure for classifying and characterizing efficiency and inefficiency in data envelopment analysis. Journal of Productivity Analysis, 2(3), 197-237.

[7] Thanassoulis, E., Allen, R., (1998). Simulating weights restrictions in data envelopment analysis by means of unobserved DMUs. Management Science, 44(4), 586-594.

[8] Rouse, P., (2004). Using DEA to set prices for health care delivery in New Zealand hospitals, Working paper. The University of Auckland, New Zealand.

[9] Thanassoulis, E., Kortelainen, M., Allen, R., (2012). Improving envelopment in Data Envelopment Analysis under variable returns to scale. European Journal of Operational Research, 218(1), 175-185.

[10] Bougnol, M.L., Dula, J.H., (2009). Anchor points in DEA. European Journal of Operational Research, 192(2), 668-676.

[11] Mostafaee, A., Soleimani-damaneh, M., (2014). Identifying the anchor points in DEA using sensitivity analysis in linear programming. European Journal of Operational Research, 237(1), 383-388.

[12] Mostafaee, A., Soleimani-damaneh, M., (2016). Some Conditions for Characterizing Anchor Points. Asia-Pacific Journal of Operational Research, 33(2), 1650013.

[13] Bani, A.A., Rostamy-Malkhalifeh, M., Hosseinzadeh Lotfi, F., Akbarian, D., (2020). A Method for Finding the Anchor Points of BCC Model in DEA Context. Journal of Mathematical Extension, 14(2), 49-68.

[14] Soleimani-damaneh, M., Mostafaee, A., (2015). Identification of the anchor points in FDH models. European Journal of Operational Research, 246(3), 936-943.

[15] Koushki, J., Soleimani-damaneh, M., (2019). Anchor points in multiobjective optimization: definition, characterization and detection. Optimization Methods and Software, 34(6), 1145-1167.

[16] Bougnol, M.L., (2001). Nonparametric frontier analysis with multiple constituencies. Ph.D. Dissertation, The University of Mississippi.

[17] Allen, R., Thanassoulis, E., (2004). Improving envelopment in data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, 154(4), 363-379.

[18] Banker, R.D., (1984). Estimation most productive scale size using data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, 17(1), 35-44.

[19] Hadi-vencheh, A., Foroughi, A.A., Soleimani-damaneh, M., (2008). A DEA model for resource allocation. Economic Modelling. 25(5), 983-993.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.79]

[20] Bellman, R.E., Zadeh, L.A., (1970). Decision making in a fuzzy environment. Manage. Sci. 17(4), 141–164.
[21] Buckley, J.J., (1983). Fuzzy programming and the Pareto optimal set. Fuzzy Set Syst. 10(1-3), 57–63.
[22] Peykani, P., Mohammadi, E., Emrouznejad, A., Pishvaee, M.S., Rostamy-Malkhalifeh, M., (2019). Fuzzy data envelopment analysis: an adjustable approach. Expert Systems with Applications, 136, 439-452.
[23] Peykani, P., Mohammadi, E., Pishvaee, M.S., Rostamy-Malkhalifeh, M., Jabbarzadeh, A., (2018). A novel fuzzy data envelopment analysis based on robust possibilistic programming: possibility, necessity and credibility-based approaches. RAIRO-Operations Research, 52(4), 1445-1463.
[24] Rostamy-Malkhalifeh, M., Aghayi, N., (2011). Measuring Overall Profit Efficiency with Fuzzy Data. Journal of Mathematical Extension, 5(2), 73-90.
[25] Moore, R.E., (1979). Method and Application of Interval Analysis. SIAM, Philadelphia.
[26] Sengupta, J.K., (1981). Optimal Decision under Uncertainty. Springer, New York.
[27] Hosseinzadeh Lotfi, F., Navabakhs, M., Tehranian, A., Rostamy-Malkhalifeh, M., Shahverdi, R., (2007). Ranking bank branches with interval data the application of DEA. International Mathematical Forum, 2(9), 429-440.
[28] Rostamy-Malkhalifeh, M., Seyed Esmaeili, F.S., (2016). Computing the efficiency interval of decision making units (DMUs) having interval inputs and outputs with the presence of negative data. Journal of New Researches in Mathematics, 1(4), 5-14.
[29] Rostamy-Malkhalifeh, M., Aghayi, N., (2011). Two Ranking of Units on the Overall Profit Efficiency with Interval Data. Mathematics Scientific Journal**,** 8(2), 73-93.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOI: 10.22034/20.4.79]