مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال هفدهم، شماره سوم (پیاپی ۶۶)، پاییز ۹۹، ص ص ۶۲-۴۵
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

حل تقریبی مسایل مقدار اولیه و مرزی با استفاده از بهینه‌سازی بر اساس روش هم‌مکانی چندجمله‌ای برنشتاین

محمدرضا انصاری[1*]
۱- استادیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)، قزوین، ایران

رسید مقاله: ۹ شهریور ۱۳۹۸
پذیرش مقاله: ۱۲ بهمن ۱۳۹۸

چکیده
روش هم‌مکانی در حل انواع معادلات دیفرانسیل بسیار متداول است. مشکل اصلی در این روش این است که ماتریس ضرایب با افزایش درجه تقریب بدشرط می‌شود. این می‌تواند باعث برخی مشکلات عددی و کاهش در دقت جواب شود. در این مطالعه، سه روش بر اساس ترکیب روش هم‌مکانی برنشتاین و روش‌های بهینه‌سازی برای جواب تقریبی مسایل مقدار اولیه و مرزی شامل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر پیشنهاد شده است. در این روش‌ها، جواب تقریبی مساله با استفاده از جواب یک مساله کم‌ترین مربعات خطی مقید یا یک مساله برنامه‌ریزی خطی به دست می‌آید. برای بررسی کارایی روش‌ها، مسایل آزمایشی از مرتبه‌های مختلف در نظر گرفته شده و نتایج به دست آمده با نتایج گزارش شده از روش‌های دیگر مقایسه می‌شوند. بررسی‌ها نشان می‌دهند که روش‌های پیشنهاد شده دقیق، کارا و دارای پایداری عددی خوبی هستند.

کلمات کلیدی: مسایل مقدار اولیه و مرزی، معادله دیفرانسیل خطی، روش هم‌مکانی برنشتاین، بهینه‌سازی.

۱ مقدمه
معادلات دیفرانسیل کاربردهای زیادی در علوم و مهندسی دارند. مدل‌سازی و شرح پدیده‌های گوناگون مانند مدل‌سازی دینامیک، انتقال گرما، انتشار بیماری، امواج صوتی، پیش‌بینی آب و هوا، حمل و نقل، تغییرات ارزش سهام و بسیاری دیگر، مثال‌هایی از این کاربردها هستند. بسیاری از این معادلات دیفرانسیل که در زمینه‌های مکانیک، گرما، برق، آیرودینامیک، تجزیه و تحلیل تنش و غیره به‌وجود می‌آیند، خطی هستند. اگر چه رده‌های محدودی از معادلات دیفرانسیل را می‌توان با استفاده از روش‌های تحلیلی حل کرد، در حالت کلی حل مستقیم بسیاری از انواع معادلات دیفرانسیل ناممکن یا بسیار دشوار است. از این رو، برای دستیابی به یک جواب قابل

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: mr.ansari@sci.ikiu.ac.ir

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.6.6]

قبول باید از روش‌های عددی یا رویکردهای تقریبی استفاده کرد. به همین دلیل، نیاز به تدوین روش‌های عددی جدید و یا بهبود در روش‌های موجود همیشه وجود داشته است.

در این مطالعه، هدف ما ارایه روش‌هایی دقیق و کارا برای حل تقریبی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n با ضرایب متغیر به شکل کلی زیر است:

$$L(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(k)}(x) = f(x), \quad x \in [a,b] \qquad (1)$$

که در آن، L نمایان‌گر عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه n است. توابع $f(x)$ و $p_i(x)$ معلوم و $[a,b]$ دامنه مساله را نشان می‌دهد. در اینجا و در ادامه، مشتق kام تابع y نسبت به متغیر x با $y^{(k)}(x)$ نشان داده می‌شود. تعداد $n-1$ شرط اولیه یا شرط مرزی لازم برای حل (۵) عبارتند از:

$$S_l(y) = q_l, \qquad l = 1,\ldots,n-1 \qquad (2)$$

که در آن، S_lها عملگرهای خطی شرایط اولیه (در این حالت همه قیود روی $x=a$ عمل می‌کنند) و یا شرایط مرزی (در این حالت قیود روی بیش از یک نقطه و به طور معمول روی دو مقدار مرزی $x=a$ و $x=b$ از بازه $[a,b]$ عمل می‌کنند) می‌باشند. هم‌چنین، q_lها مقادیر حقیقی معلوم هستند.

از دیر باز فضاهای چندجمله‌ای به دلیل ویژگی‌های مطلوبی که دارند نقشی اساسی در نظریه تقریب و آنالیز عددی داشته‌اند. این توابع به صورت صریح و دقیق تعریف می‌شوند، برای محاسبات رایانه‌ای بسیار مناسب هستند و طیف وسیعی از توابع را می‌توان توسط آن‌ها نمایش داد. علاوه بر این، مشتق و انتگرال آن‌ها را نیز می‌توان به سادگی محاسبه کرد [۲،۱].

چندجمله‌ای‌های برنشتاین[1] به دلیل ویژگی‌های خوب خود، مانند مثبت بودن، تقارن، روابط بازگشتی، محاسبه سریع، پایداری بهینه و ...، در نظریه تقریب و طراحی هندسی بسیار مورد توجه قرار داشته‌اند [۲-۷]. بهاتی و براکن [۳] چندجمله‌ای‌های برنشتاین را در روش گالرکین[2] برای حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی به کار بردند. دوها و همکاران [۴] از چندجمله‌ای‌های برنشتاین در روش گالرکین برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه زوج بزرگ استفاده کردند. آیشک و همکاران [۵] روشی برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه بزرگ بر اساس درونیابی کسری و روش هم‌مکانی چندجمله‌ای‌های برنشتاین ارایه نمودند. باتاچاریا و مندال [۶] از این چندجمله‌ای‌ها در حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل استفاده کردند.

در سال‌های اخیر، روش‌های هم‌مکانی[3] به صورت گسترده برای حل انواع معادلات دیفرانسیل استفاده شده‌اند [۴] و [۸-۱۰]. در مسایل خطی، روش‌های هم‌مکانی اغلب حل مساله را به حل یک دستگاه معادلات خطی تبدیل می‌کنند. مشکلی که در اینجا می‌تواند بروز کند، بدشرط بودن ماتریس ضرایب است که باعث بروز مشکلات عددی وکاهش دقت جواب می‌شود. این مشکل اغلب زمانی پدید می‌آید که نقاط هم‌مکانی خیلی به هم نزدیک باشند.

[1] Bernstein polynomials
[2] Galerkin method
[3] Collocation Methods

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.6.6]

در گذشته، روش‌های مبتنی بر بهینه‌سازی در مدل‌سازی و حل بسیاری از مسایل با موفقیت به کار گرفته شده‌اند [۱۴-۱۱]. در این مقاله، ما سه روش براساس کمینه‌سازی باقیمانده‌های متناظر با معادلات هم‌مکانی چندجمله‌ای‌های برنشتاین برای حل معادله (۱) و (۲) پیشنهاد می‌کنیم. این روش‌ها نه تنها نسبت به روش هم‌مکانی جواب‌های دقیق‌تری می‌دهند، بلکه از نظر عددی با افزایش درجه تقریب پایدار می‌باشند و نیز حل مساله را به حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی و یا یک مساله کم‌ترین مربعات خطی مقید تبدیل می‌کنند تا بتوان از مزایای عددی روش‌های پیشرفته بهینه‌سازی به خوبی استفاده کرد.

ادامه این مقاله به صورت زیر سازمان‌دهی شده است. بخش ۲ به معرفی چندجمله‌ای‌های برنشتاین و برخی ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازد. شرح روش هم‌مکانی استاندارد موضوع بخش ۳ است. روش‌های پیشنهادی در بخش ۴ شرح داده خواهند شد. در بخش ۵، به برخی نکات مربوط به پیاده‌سازی، مسایل آزمون، نتایج عددی به دست آمده و مقایسه آن‌ها با نتایج گزارش شده می‌پردازیم. سرانجام، در بخش ۶ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری خواهیم کرد.

۲ چندجمله‌ای‌های برنشتاین

چندجمله‌ای‌های پایه برنشتاین از مرتبه m بر بازه $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$B_{i,m}=\binom{m}{i}\frac{(x-a)^i(b-x)^{m-i}}{(b-a)^m} \qquad i=0,\dots,m$$

برای سادگی، متناظر با $i<0$ و $i>m$ فرض می‌شود $B_{i,m}=0$. از مزایای این چندجمله‌ای‌ها مقادیر تابع و مشتقات آن در نقاط مرزی است [۴]:

$$B_{i,m}^{(k)}(a)=\begin{cases}0 & i>k\\ \dfrac{k!(-1)^{k-i}\binom{m}{k}\binom{k}{i}}{(b-a)^k} & i\le k\end{cases} \qquad B_{i,m}^{(k)}(b)=\begin{cases}0 & i<m-k\\ \dfrac{k!(-1)^{m-i}\binom{m}{i}\binom{i}{m-k}}{(b-a)^k} & i\ge m-k\end{cases} \qquad (۳)$$

در بخش ۴ خواهیم دید که این خاصیت کمک می‌کند تا در تقریب جواب معادله دیفرانسیل، برقراری برخی از انواع شرایط مرزی یا اولیه را به سادگی اعمال کنیم.

از جمله روابط بازگشتی ثابت شده برای چندجمله‌ای‌های پایه برنشتاین عبارتند از [۴]:

$$B_{i,m}(x)=\frac{1}{b-a}\left[(b-x)B_{i,m-1}(x)+(x-a)B_{i-1,m-1}(x)\right] \qquad i=0,\dots,m \qquad (۴)$$

$$B'_{i,m}(x)=\frac{1}{b-a}\left[(m-i+1)B_{i-1,m}(x)+(2i-m)B_{i,m}(x)-(i+1)B_{i+1,m}(x)\right] \quad i=0,\dots,m \qquad (۵)$$

رابطه بازگشتی (۴) چندجمله‌ای‌های پایه مرتبه m را برحسب چندجمله‌ای‌های پایه مرتبه $m-1$ بیان می‌کند و رابطه (۵) مشتق چندجمله‌ای‌های پایه مرتبه m را بر حسب چندجمله‌ای‌های پایه همان مرتبه می‌نویسد. با تعریف

$$\phi_m(x)=[B_{0,m} \quad B_{1,m} \quad \dots \quad B_{m,m}]^T \qquad (۶)$$

و با استفاده از (۵) خواهیم داشت $\phi'(x)=D\phi(x)$ و با تعمیم آن $\phi^{(k)}(x)=D^k\phi(x)$ که در آن، D ماتریس عملیاتی مشتق $(m+1)\times(m+1)$ با درایه‌های زیر است:

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.6.6]

$$d_{ij} = \frac{1}{b-a}\begin{cases} m-j, & if \quad i = j+1 \\ 2j-m, & if \quad i = j \\ -j, & if \quad i = j-1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

فرض کنید که $y \in C[a,b]$. چندجمله‌ای برنشتاین متناظر با y در بازه $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B_m(y;x) = \sum_{i=0}^{m} y(a + \frac{(b-a)i}{m}) B_{i,m}(x)$$

قضیه زیر بستر مناسب برای استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین در تقریب توابع را فراهم می‌کند [۲].

قضیه ۱. فرض کنید که $K > 0$ عدد صحیح مثبتی باشد و $y \in C^K[a,b]$. در این صورت،

$$\lim_{m \to \infty} B_m^{(k)}(y;x) = y^{(k)}(x) \qquad k = 0,1, \ldots, K$$

۳ روش هم‌مکانی استاندارد

یک جواب هم‌مکانی y_m برای یک معادله تابعی (برای مثال، یک معادله دیفرانسیل معمولی، یک معادله با مشتقات جزیی یا یک معادله انتگرال-دیفرانسیل) روی بازه Ω، عضوی از یک فضای تابعی با بعد متناهی به نام فضای هم‌مکانی است که معادله را در زیرمجموعه‌ای متناهی و خاص از نقاط Ω به نام مجموعه نقاط هم‌مکانی برقرار می‌کند. اگر شرایط اولیه یا مرزی نیز وجود داشته باشند، آنگاه بدیهی است که y_m باید این شرایط را نیز برقرار کند.

معادله دیفرانسیل (۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید که

$$y_m(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i \, B_{i,m}(x) = \phi_m(x)^T C \qquad (۷)$$

تقریب جواب باشد که در آن، $C = [c_0, c_1, \cdots, c_m]^T$ بردار ضرایب مجهول و $\phi_m(x)$ بردار توابع پایه است که در (۶) تعریف شد. چنین شکلی از جواب اغلب مناسب است، به ویژه هنگامی که جواب برای برخی محاسبات دیگر که در آن‌ها دقت و سرعت بالا مورد نیاز باشد، مناسب است. می‌توان نوشت:

$$L(y_m) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y_m^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) \big(D^k \phi_m(x)\big)^T C = \big(\sum_{k=0}^{n} p_k(x) D^k \phi_m(x)\big)^T C \qquad (۸)$$

در نتیجه، با جای‌گذاری (۷) در (۱) به دست می‌آید:

$$\big(\sum_{k=0}^{n} p_k(x) D^k \phi_m(x)\big)^T C = f(x) \qquad (۹)$$

برای تعیین ضرایب مجهول، با جای‌گذاری نقاط هم‌مکانی $x_j \in [a,b]$، $j = 1, \ldots, m-n+2$، در رابطه بالا داریم:

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.6.6]

$$\left(\sum_{k=0}^{n} p_k(x_j) D^k \phi_m(x_j)\right)^T C = f(x_j) \qquad j = 1,\ldots,m-n+2 \qquad (10)$$

هم‌چنین، با جای‌گذاری (۷) در شرایط اولیه و یا مرزی (۲) و استفاده از خطی بودن S_lها به دست می‌آید:

$$\left(S_l(\phi_m)\right)^T C = q_l \qquad l = 1,\ldots,n-1 \qquad (11)$$

مجموع $m-n+2$ معادله (۱۰) و $n-1$ معادله (۱۱) دستگاهی متشکل از $m+1$ معادله و $m+1$ مجهول می‌سازد که با حل آن c_iها و در نتیجه y_m به دست می‌آید.

توجه کنید که با به‌کارگیری خاصیت (۳)، اغلب می‌توان با استفاده از (۱۱) برخی از c_jها را به طور مستقل از معادلات (۱۰) محاسبه کرد. در این صورت، با جای‌گذاری این مقادیر در (۱۰) دستگاه تقلیل‌یافته‌ای برای محاسبه باقی مجهول‌ها به دست می‌آید. برای مثال، متناظر با شرایط مرزی $y(a)=\alpha$ و $y'(a)=\beta$ با استفاده از (۱۱) داریم:

$$\begin{cases} y_m(a)=\alpha \\ y'_m(a)=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 B_{0,m}(a) = \alpha \\ c_0 B'_{0,m}(a) + B'_{1,m}(a) = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = \alpha \\ \dfrac{-mc_0}{b-a} + \dfrac{mc_1}{b-a} = \beta \end{cases} \Rightarrow c_0 = \alpha, \;\; c_1 = \alpha + \frac{\beta(b-a)}{m}$$

به عنوان نمونه‌ای دیگر، برای شرایط مرزی $y(a)=\alpha$ و $y(b)=\beta$، استفاده از (۱۱) به دست می‌دهد:

$$\begin{cases} y_m(a)=\alpha \\ y_m(b)=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 B_{0,m}(a) = \alpha \\ c_m B_{m,m}(b) = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = \alpha \\ c_m = \beta \end{cases}$$

٤ روش‌های پیشنهادی مبتنی بر بهینه‌سازی

دیدیم که در روش هم‌مکانی مجهول‌ها با استفاده از معادلات هم‌مکانی به دست می‌آیند. اگرچه این روش ساده و کم هزینه است، با این حال برای مقادیر بزرگ m ماتریس ضرایب بدشرط شده و دقت جواب کاهش می‌یابد. برخی روش‌های دیگر البته با هزینه بیشتر سعی در محاسبه ضرایب مجهول با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی دارند [۱۲،۱۱]. در این روش‌ها می‌توان از تعداد نقاط بیشتری برای تقریب استفاده کرد و اغلب انتظار جوابی با دقت بهتر داریم.

ما به منظور استفاده از مزایای هر دو روش، ترکیبی از آن دو را به‌کار خواهیم گرفت. متناظر با معادله (۱)، تابع باقیمانده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(y;x) = L(y) - f(x)$$

بدیهی است که جواب دقیق y_e در شرایط اولیه (یا مرزی) صدق می‌کند و برای آن $R(y_e;x)=0$. با توجه به (۹)، برای جواب تقریبی y_m تابع باقیمانده برابر است با

$$R(y_m;x) \equiv R_m(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} p_k(x) D^k \phi_m(x)\right)^T C - f(x)$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.6.6]

بردار C با استفاده از ترکیب روش هم‌مکانی و کمینه‌سازی خطای متناظر با تابع $R_m(x)$ تعیین خواهد شد. y_m باید طوری تعیین شود که $n-1$ شرط اولیه یا مرزی به طور دقیق برآورده شوند. این $n-1$ معادله به دست می‌دهد و در نتیجه برای تعیین y_m تنها $(m+1)-(n-1)=m-n+2$ درجه آزادی باقی می‌ماند. نقاط هم‌مکانی را $x_1,\ldots,x_{n_p}\in[a,b]$ در نظر می‌گیریم که $n_p\geq m-n+2$. این نقاط را به دو زیرمجموعه متمایز A و B افراز کرده و اندیس نقاط دو مجموعه را به ترتیب با I و J نشان می‌دهیم. برای هر $j\in J$ قرار می‌دهیم $R_m(x_j)=0$، تا در این نقاط y_m به طور دقیق در معادله دیفرانسیل صدق کند. بهتر است این نقاط تا حد ممکن به طور یکنواخت در بازه $[a,b]$ توزیع شده باشند و تعداد آن‌ها باید کمتر از $m-n+2$ (برای مثال، $0/5(m-n+2)$) باشد. در غیر این صورت، این معادلات y_m را به طور دقیق معلوم می‌کنند. برای نقاط A که اندیس آن‌ها را I در نظر می‌گیریم، خطاهای متناظر با تابع باقیمانده را کمینه خواهیم کرد. توضیح بالا منجر به پیشنهاد سه رویکرد زیر می‌شود. در هر سه رویکرد اگر $n_p=m-n+2$، خطا در همه نقاط هم‌مکانی صفرشده و روش هم‌ارز روش هم‌مکانی خواهد شد. در غیراین صورت، چون کمینه‌سازی خطا در نقاط بیشتری مدنظر قرار می‌گیرد (به عبارتی، فضای امکان‌پذیر بزرگ‌تر است)، باید حداکثر خطای تقریب دست‌کم روی نقاط مورد استفاده کم‌تر از خطای تقریب در روش هم‌مکانی باشد. نتایج عددی بخش ۵ به خوبی این موضوع را تایید می‌کنند.

الف) کمینه‌سازی مجموع مربعات خطا

در این رویکرد مجموع مربعات خطا کمینه می‌شود. از این رو، مساله کمترین مربعات خطی مقید زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i\in I}\Big[\Big(\sum_{k=0}^{n} p_k(x_i)D^k\phi_m(x_i)\Big)^T C - f(x_i)\Big]^2\\
&\text{s.t.}\quad \Big(\sum_{k=0}^{n} p_k(x_j)D^k\phi_m(x_j)\Big)^T C = f(x_j) \qquad j\in J\\
&\qquad (S_l(\phi_m))^T C = q_l \qquad l=1,\ldots,n-1
\end{aligned}$$

برای حل این مساله می‌توان از روش‌های ویژه و کارا برای حل مساله کمترین مربعات خطی مقید استفاده کرد.

ب) کمینه‌سازی مجموع خطا

این رویکرد شبیه رویکرد پیش است با این تفاوت که در اینجا مجموع خطا کمینه می‌شود. از این رو، مساله کمینه‌سازی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i\in I}\Big|\Big(\sum_{k=0}^{n} p_k(x_i)D^k\phi_m(x_i)\Big)^T C - f(x_i)\Big|\\
&\text{s.t.}\quad \Big(\sum_{k=0}^{n} p_k(x_j)D^k\phi_m(x_j)\Big)^T C = f(x_j) \qquad j\in J\\
&\qquad (S_l(\phi_m))^T C = q_l \qquad l=1,\ldots,n-1
\end{aligned}$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.6.6]

با تعریف $z_i = \left|(\sum_{k=0}^{n} p_k(x_i)D^k\phi_m(x_i))^T C - f(x_i)\right|$، این مساله به مساله برنامه‌ریزی خطی هم‌ارز زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i\in I} z_i \\
&\text{s.t.} \\
&\quad (\sum_{k=0}^{n} p_k(x_i)D^k\phi_m(x_i))^T C - z_i \le f(x_i) \qquad i\in I \\
&\quad -(\sum_{k=0}^{n} p_k(x_i)D^k\phi_m(x_i))^T C - z_i \le -f(x_i) \qquad i\in I \\
&\quad (\sum_{k=0}^{n} p_k(x_j)D^k\phi_m(x_j))^T C = f(x_j) \qquad j\in J \\
&\quad (S_l(\phi_m))^T C = q_l \qquad l=1,\dots,n-1
\end{aligned}$$

این مساله را می‌توان به سادگی با استفاده از هر یک از روش‌های کارای برنامه‌ریزی خطی مانند روش‌های نقطه درونی، مجموعه موثر یا انواع روش سیمپلکس حل کرد.

پ) کمینه‌سازی بیشترین خطا

در این رویکرد، C و در نتیجه y_m به روش کمینه‌سازی بیشترین خطا تعیین می‌شود. از این رو، مساله کمینه‌سازی زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\min \max_{i\in I} \left|(\sum_{k=0}^{n} p_k(x_i)D^k\phi_m(x_i))^T C - f(x_i)\right| \\
&\text{s.t.} \\
&\quad (\sum_{k=0}^{n} p_k(x_j)D^k\phi_m(x_j))^T C = f(x_j) \qquad j\in J \\
&\quad (S_l(\phi_m))^T C = q_l \qquad l=1,\dots,n-1
\end{aligned}$$

با تعریف $z = \max_{i\in I}\left|(\sum_{k=0}^{n} p_k(x_i)D^k\phi_m(x_i))^T C - f(x_i)\right|$، مساله بالا هم‌ارز مساله برنامه‌ریزی خطی زیر می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\min \quad z \\
&\text{s.t.} \\
&\quad (\sum_{k=0}^{n} p_k(x_i)D^k\phi_m(x_i))^T C - z \le f(x_i) \qquad i\in I \\
&\quad -(\sum_{k=0}^{n} p_k(x_i)D^k\phi_m(x_i))^T C - z \le -f(x_i) \qquad i\in I \\
&\quad (\sum_{k=0}^{n} p_k(x_j)D^k\phi_m(x_j))^T C = f(x_j) \qquad j\in J \\
&\quad (S_l(\phi_m))^T C = q_l \qquad l=1,\dots,n-1
\end{aligned}$$

مساله برنامه‌ریزی خطی بالا را نیز می‌توان به سادگی با استفاده از هر روش کارای برنامه‌ریزی خطی حل کرد.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.6.6]

۵ نتایج عددی

در پیاده‌سازی الگوریتم‌های پیشنهادی ما تعداد نقاط را برابر $n_p = ۲(m-n+۲)$ و به طور یکنواخت در دامنه به صورت زیر در نظر گرفتیم:

$$\text{در مسایل مقدار اولیه}: \quad x_i = a + \frac{(b-a)i}{n_p} \qquad i = ۱,\ldots,n_p$$

$$\text{در مسایل مقدار مرزی}: \quad x_i = a + \frac{(b-a)i}{n_p+۱} \qquad i = ۱,\ldots,n_p$$

نقاط B که برای آن‌ها قیود هم‌مکانی به طور دقیق برقرار می‌شوند، نقاط با اندیس $۴k$ که $k = ۱,\ldots,[\frac{۱}{۴}n_p]$ در نظر گرفته شدند. به این ترتیب تعداد این نقاط حدود $۰/۵(m-n+۲)$ خواهد بود. باقی نقاط مجموعه A را می‌سازند.

برنامه‌های مورد نیاز در محیط نرم‌افزار متلب[1] نوشته شدند و در رایانه‌ای با پردازنده AMD 1650 Mhz اجرا شدند. در این نرم‌افزار برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی از الگوریتم active-set ارایه شده در تابع ( )linprog و برای حل مساله کم‌ترین مربعات خطی مقید از تابع ( )lsqlin با مقادیر پیش‌فرض استفاده شد.

برای بررسی دقت و کارایی روش‌های پیشنهادی، نتایج عددی روی مسایل آزمایشی ارایه و با نتایج روش‌های دیگر مقایسه و بررسی می‌شوند. برای مقایسه‌ها، خطای میانگین و خطای بیشینه جواب تقریبی y_m به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$E_{\text{mean}} = \frac{\sum_{i=۱}^{n_p} |y_m(x_i) - y_e(x_i)|}{n_p}, \qquad E_{\max} = \max_{۱\le i\le n_p} |y_m(x_i) - y_e(x_i)|$$

که در آن، y_e جواب دقیق مساله است.

ما مسایل آزمون گوناگون با شرایط اولیه و یا مرزی از مرتبه‌های مختلف در نظر گرفتیم که شامل ۷ مساله مرتبه ۲ و ۶ مساله مرتبه بزرگ‌تر هستند ودر زیر فهرست آن‌ها همراه با جواب دقیق هر یک، y_e، آمده است:

۱) $y''+xy'-۲y = x\cos x - ۳\sin x, \quad y(۰)=۰,\ y'(۰)=۱, \quad ۰\le x\le ۱, \quad y_e = \sin x$

۲) $\cos^۲x\ y'' - \frac{۱}{۲}\sin ۲x\ y' - y = ۰, \quad y(۰)=۰,\ y'(۰)=۱, \quad ۰\le x\le ۱, \quad y_e = \tan x$

۳) $y''-\sin x\, y'+\cos x\, y = -\sin x, \quad y(۰)=۰,\ y'(۰)=۱, \quad ۰\le x\le ۱, \quad y_e = \sin x$

۴) $y''-(۱-\cos x)y' = e^x\cos x, \quad y(۰)=۱,\ y'(۰)=۱, \quad ۰\le x\le ۱, \quad y_e = e^x$

۵) $(۱+x)^۲y''+(x-۱)y = ۱, \quad y(۰)=۱,\ y'(۰)=-۱, \quad ۰\le x\le ۱, \quad y_e = \frac{۱}{۱+x}$

۶) $x\,y''+۲y'+xy = ۶x+۱۲x^۲+x^۳+x^۴, \quad y(۰)=۰,\ y'(۰)=۰, \quad ۰\le x\le ۱, \quad y_e = x^۲+x^۳$

۷) $(۱+x)^۲y''+(x-۱)y = ۱, \quad y(۰)=۱,\ y(۱)=\frac{۱}{۲}, \quad ۰\le x\le ۱, \quad y_e = \frac{۱}{۱+x}$

[1] MATLAB 2013b

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.6.6]

۸) $(1+x)^2 y''' + (1+x)y'' - y' + x(1+x)y = x(1+x)\ln(1+x), \quad 0 \le x \le 1, \quad y_e = \ln(1+x)$
$y(0)=0, \quad y'(0)=1, \quad y''(0)=-1$

۹) $(1+x+x^2)y''' + (3+6x)y'' + 6y' = 6x, \quad 0 \le x \le 1, \quad y_e = \frac{x^4 - 9x^2 + 4x + 4}{4(x^2+x+1)}$
$y(0)=1, \quad y'(0)=0, \quad y(1)=0$

۱۰) $y^{(6)} + (5x+1)y = (185x - 25x^2 + 10x^4)\cos x + (270 - 36x^2)\sin x, \quad -1 \le x \le 1, \quad y_e = (2x^3 - 5x + 1)\cos x$
$y(-1) = 4\cos 1, \quad y'(-1) = \cos 1 + 4\sin 1, \quad y''(-1) = -16\cos 1 + 2\sin 1$
$y(1) = -2\cos 1, \quad y'(1) = \cos 1 + 2\sin 1, \quad y''(1) = 14\cos 1 - 2\sin 1,$

$y^{(6)} + e^{-x} y = (x - x^2)^3 e^{-x} - 720, \quad 0 \le x \le 1, \quad y_e = x^3(1-x)^3$

۱۱) $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$

۱۲) $y^{(4)} - (1+c)y'' + c\,y = \frac{1}{2}c\,x^2 - 1, \quad 0 \le x \le 1, \quad y_e = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sinh x$
$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = \frac{3}{2} + \sinh 1, \quad y'(1) = 1 + \cosh 1$

۱۳) $y^{(6)} - (1+c)y^{(4)} + cy'' = cx, \quad 0 \le x \le 1, \quad y_e = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \sinh x$
$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0,$
$y(1) = \frac{7}{6} + \sinh 1, \quad y'(1) = \frac{1}{2} + \cosh 1, \quad y''(1) = 1 + \sinh 1$

برای تقریب جواب، از چندجمله‌ای‌های پایه برنشتاین با درجه‌های $m = 5, 10, 15, 25, 35$ استفاده شد. نتایج حاصل برای مسایل شماره ۱ تا ۱۱ برای مقادیر مختلف m به ترتیب در جدول‌های ۱ تا ۵ گزارش شده‌اند. در این جدول‌ها ستون با برچسب PN شماره مساله را نشان می‌دهد. عدد حالت ماتریس ضرایب و خطای میانگین جواب روش هم‌مکانی به ترتیب در ستون اول و دوم زیر برچسب CM داده شده‌اند. خطاهای میانگین متناظر با روش‌های پیشنهادی مبتنی بر کمینه‌سازی مجموع مربعات خطا، مجموع خطا و بیشینه خطا به ترتیب در ستون‌هایی با برچسب‌های PM1، PM2 و PM3 نشان داده شده‌اند.

جدول ۱. نتایج حاصل از اجرای روش‌ها برای چندجمله‌ای برنشتاین از مرتبه $m = 5$

PN	CM		PM1	PM2	PM3
۱	۰۵/۴e+۰۱	۱۹۳۷/۴e-۰۵	۴۴۴۰/۸e-۰۶	۹۳۲۹/۱e-۰۵	۲۴۷۹/۲e-۰۵
۲	۲۳/۱e+۰۱	۵۶۰۸/۷e-۰۲	۱۱۳۰/۱e-۰۲	۲۰۰۶/۳e-۰۲	۰۲۵۸/۳e-۰۲
۳	۲۴/۳e+۰۱	۲۷۸۳/۴e-۰۵	۲۷۲۲/۶e-۰۶	۰۰۳۸/۲e-۰۵	۰۳۷۶/۲e-۰۵
۴	۳۴/۳e+۰۱	۴۸۲۴/۱e-۰۴	۵۳۵۶/۲e-۰۵	۲۰۹۱/۷e-۰۵	۹۴۰۹/۶e-۰۵
۵	۴۳/۱e+۰۲	۷۹۱۵/۶e-۰۲	۰۵۱۹/۴e-۰۲	۶۹۱۲/۶e-۰۲	۵۳۱۴/۵e-۰۲
۶	۷۱/۲e+۰۱	۵۰۲۳/۱e-۱۶	۲۱۰۸/۱e-۱۶	۶۲۷۲/۱e-۱۶	۴۴۵۳/۵e-۱۶
۷	۴۵/۶e+۰۰	۹۸۶۸/۱e-۰۴	۹۳۲۴/۹e-۰۵	۴۸۴۰/۱e-۰۴	۶۴۱۹/۱e-۰۴
۸	۶۱/۱e+۰۲	۹۳۱۱/۵e-۰۳	۶۳۰۲/۲e-۰۳	۹۳۱۱/۵e-۰۳	۵۸۷۱/۵e-۰۳
۹	۴۷/۲e+۰۱	۲۴۷۰/۱e-۰۳	۲۶۳۰/۱e-۰۳	۹۰۵۲/۲e-۰۳	۶۵۸۲/۱e-۰۳
۱۰	۳/۲۸e+۰۱	۳۱۵۹/۹e-۰۳	۳۱۵۹/۹e-۰۳	۳۱۵۹/۹e-۰۳	۳۱۵۹/۹e-۰۳
۱۱	۸/۷۳e+۰۱	۴۳۰۸/۶e-۰۳	۴۳۰۸/۶e-۰۳	۴۳۰۸/۶e-۰۳	۴۳۰۸/۶e-۰۳

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.6.6]

جدول ۲. نتایج حاصل از اجرای روش‌ها برای چندجمله‌ای برنشتاین از مرتبه $m = ۱۰$

PN	CM		PM1	PM2	PM3
۱	۵۰/۲e+۰۳	۶۸۴۴/۲e-۱۱	۴۲۸۶/۱e-۱۲	۲۰۶۱/۱e-۱۲	۷۴۳۵/۲e-۱۲
۲	۰۲/۱e+۰۳	۲۵۶۴/۱e-۰۳	۹۹۶۶/۳e-۰۵	۷۲۴۷/۲e-۰۵	۶۷۶۳/۹e-۰۵
۳	۱۵/۲e+۰۳	۵۸۹۱/۲e-۱۱	۲۶۴۱/۱e-۱۲	۱۰۵۵/۱e-۱۲	۴۷۹۹/۲e-۱۲
۴	۱۹/۲e+۰۳	۸۷۴۶/۴e-۱۱	۳۷۴۵/۲e-۱۲	۰۱۰۹/۲e-۱۲	۹۶۵۲/۴e-۱۲
۵	۶۹/۵e+۰۳	۳۷۴۵/۱e-۰۳	۹۳۲۸/۱e-۰۴	۷۶۳۲/۱e-۰۴	۱۹۸۷/۳e-۰۴
۶	۲۴/۱e+۰۲	۴۷۳۷/۲e-۱۶	۲۱۲۳/۱e-۱۶	۵۷۷۴/۲e-۱۶	۳۴۳۵/۷e-۱۶
۷	۹۹/۵e+۰۲	۲۴۵۹/۱e-۰۷	۶۶۲۴/۲e-۰۸	۱۱۹۷/۵e-۰۸	۳۰۶۷/۱e-۰۸
۸	۵۵/۱e+۰۴	۵۲۰۸/۱e-۰۵	۷۰۹۸/۲e-۰۶	۴۹۰۳/۸e-۰۷	۵۵۴۴/۲e-۰۶
۹	۰۵/۶e+۰۲	۵۳۰۶/۱e-۰۵	۸۴۶۵/۸e-۰۷	۲۷۷۸/۲e-۰۶	۹۲۸۵/۳e-۰۷
۱۰	۸۲/۴e+۰۱	۷۳۷۳/۳e-۰۶	۵۷۳۵/۶e-۰۷	۸۰۳۵/۱e-۰۶	۱/۴۲۳۰e-۰۶
۱۱	۸۱/۴e+۰۱	۵۱۵۶/۱e-۱۷	۸۱۵۱/۱e-۱۷	۷۷۷۱/۱e-۱۷	۸۵۹۱/۱e-۱۷

جدول ۳. نتایج حاصل از اجرای روش‌ها برای چندجمله‌ای برنشتاین از مرتبه $m = ۱۵$

PN	CM		PM1	PM2	PM3
۱	۵۰/۱e+۰۵	۵۸۸۷/۲e-۱۳	۰۶۳۹/۴e-۱۶	۵۰۷۲/۵e-۱۶	۰۵۸۵/۲e-۱۵
۲	۰۶/۶e+۰۴	۲۴۹۴/۱e-۰۵	۸۸۰۸/۲e-۰۷	۶۸۵۰/۱e-۰۷	۲۱۰۱/۳e-۰۷
۳	۳۴/۱e+۰۵	۴۵۳۵/۹e-۱۴	۰۶۶۰/۱e-۱۵	۴۷۹۵/۲e-۱۶	۷۱۶۹/۳e-۱۵
۴	۳۶/۱e+۰۵	۶۳۰۶/۳e-۱۳	۴۴۹۱/۳e-۱۵	۸۵۰۴/۱e-۱۵	۹۵۸۴/۱e-۱۴
۵	۲۷/۳e+۰۵	۹۷۷۰/۱e-۰۵	۲۴۲۵/۱e-۰۶	۳۸۴۰/۱e-۰۶	۴۱۳۸/۱e-۰۶
۶	۵۲/۱e+۰۵	۱۱۴۸/۱e-۱۴	۱۵۵۰/۲e-۱۶	۹۹۳۳/۲e-۱۶	۴۹۳۹/۵e-۱۵
۷	۰۴/۷e+۰۴	۳۸۵۰/۲e-۱۰	۶۷۸۹/۵e-۱۲	۴۴۳۹/۱e-۱۱	۱۵۰۰/۶e-۱۲
۸	۰۹/۱e+۰۶	۲.۵۵۶۸e-۰۸	۰۸۲۷/۱e-۰۹	۲۲۴۱/۸e-۱۰	۳۷۹۰/۱e-۰۹
۹	۸۲/۵e+۰۴	۹۸۵۴/۵e-۰۸	۰۳۵۸/۲e-۰۹	۱۸۷۴/۳e-۱۰	۵۱۰۴/۴e-۱۰
۱۰	۵۳/۵e+۰۲	۶۸۸۵/۳e-۱۳	۵۷۹۴/۳e-۱۳	۱۸۳۹/۱e-۱۳	۱۵۸۷/۱e-۱۳
۱۱	۵۲/۵e+۰۲	۶۰۳۷/۴e-۱۶	۱۲۳۹/۵e-۱۷	۲/۳۶۳۷e-۱۷	۵۶۹۹/۵e-۱۷

جدول ٤. نتایج حاصل از اجرای روش‌ها برای چندجمله‌ای برنشتاین از مرتبه $m = ۲۵$

PN	CM		PM1	PM2	PM3
۱	۴۴/۱e+۰۹	۸۸۶۴/۱e-۱۰	۱۱۲۱/۱e-۱۵	۶۸۳۱/۲e-۱۵	۱/۶۸۸۹e-۱۴
۲	۳۷/۵e+۰۸	۵۸۷۱/۳e-۱۰	۸۰۰۸/۱e-۱۲	۳۷۹۶/۲e-۱۲	۶۶۰۹/۲e-۱۲
۳	۳۸/۱e+۰۹	۶۷۲۱/۴e-۱۰	۲۲۲۵/۳e-۱۵	۶۹۰۱/۲e-۱۵	۴۰۸۳/۹e-۱۵
۴	۳۹/۱e+۰۹	۰۸۴۱/۲e-۰۹	۰۱۵۰/۹e-۱۵	۱۵۲۱/۳e-۱۴	۷۳۰۰/۹e-۱۵
۵	۱۴/۳e+۰۹	۴۵۸۰/۲e-۰۹	۹۰۴۰/۲e-۱۱	۰۴۵۶/۴e-۱۱	۵۸۳۵/۲e-۱۱
۶	۶۴/۲e+۰۹	۶۰۲۹/۱e-۱۲	۵۰۰۹/۹e-۱۶	۳۵۴۷/۴e-۱۶	۷۷۶۲/۲e-۱۵
۷	۱۸/۱e+۰۹	۴۴۹۴/۲e-۱۲	۱۲۳۵/۱e-۱۵	۸۱۹۲/۳e-۱۶	۱۷۳۶/۵e-۱۶
۸	۲۱/۳e+۰۹	۲۶۸۶/۳e-۰۹	۴۵۸۵/۱e-۱۳	۴۰۱۸/۱e-۱۳	۵۵۱۸/۴e-۱۳
۹	۷۶/۸e+۰۸	۷۸۷۸/۲e-۱۱	۵۱۵۵/۱e-۱۴	۱۶۵۹/۶e-۱۵	۲۱۵۱/۷e-۱۵

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.6.6]

۱۰	۳۸/۶e+۰۶	۹۲۷۱/۱e-۱۳	۶۸۶۶/۳e-۱۴	۸۲۲۸/۷e-۱۵	۷۸۹۶/۹e-۱۴
۱۱	۳۸/۶e+۰۶	۴.۰۸۶۸e-۱۵	۲۲۵۴/۱e-۱۶	۱۵۴۲/۶e-۱۶	۱۹۹۶/۴e-۱۶

جدول ۵. نتایج حاصل از اجرای روش‌ها برای چندجمله‌ای برنشتاین از مرتبه $m = ۳۵$

PN	CM		PM1	PM2	PM3
۱	۶۲/۲e+۱۳	۷۲۹۷/۷e-۰۷	۲۵۵۲/۸e-۱۴	۵۹۴۷/۱e-۱۳	۲۰۹۶/۲e-۱۳
۲	۷۵/۹e+۱۲	۹۱۹۲/۹e-۰۷	۷۸۲۶/۲e-۱۴	۴۰۳۸/۷e-۱۴	۵۷۴۳/۱e-۱۳
۳	۵۴/۲e+۱۳	۱۲۷۴/۶e-۰۷	۹۳۳۸/۹e-۱۴	۳۹۱۴/۱e-۱۳	۵۹۴۵/۲e-۱۳
۴	۵۵/۲e+۱۳	۱۴۳۲/۲e-۰۶	۷۷۶۰/۷e-۱۴	۱۵۲۱/۳e-۱۳	۵۵۲۲/۳e-۱۳
۵	۷۴/۵e+۱۳	۵۸۸۱/۷e-۰۷	۸۰۵۳/۸e-۱۴	۱۳۳۹/۱e-۱۳	۳۷۰۹/۷e-۱۳
۶	۹۵/۴e+۱۳	۵۵۷۲/۵e-۰۹	۲۶۰۲/۶e-۱۵	۱۲۲۲/۱e-۱۵	۳۷۷۵/۵e-۱۴
۷	۱۷/۲e+۱۳	۳۲۶۷/۷e-۰۹	۰۴۷۶/۲e-۱۵	۷۰۶۵/۹e-۱۶	۷۵۴۹/۸e-۱۶
۸	۷۲/۱e+۱۳	۷۹۵۹/۲e-۰۶	۵۱۸۳/۲e-۱۴	۶۸۳۴/۵e-۱۴	۱/۹۴۵۳e-۱۳
۹	۵۶/۱e+۱۳	۸۲۷۵/۸e-۰۹	۱/۵۴۸۸e-۱۴	۰۱۴۴/۸e-۱۵	۸۸۵۲/۲e-۱۵
۱۰	۱۰/۱e+۱۱	۱۰۲۳/۴e-۱۱	۱۰۱۴/۱e-۱۳	۰۲۶۵/۵e-۱۳	۷۵۶۳/۹e-۱۳
۱۱	۱۰/۱e+۱۱	۵۰۰۱/۱e-۱۳	۱۹۰۱/۲e-۱۵	۳۹۷۱/۳e-۱۵	۲۰۰۲/۳e-۱۵

مساله شماره ۱۲ اولین بار توسط کانت [۱۵] ارایه شد و به نام مساله کانت شناخته می‌شود. مقادیر ویژه متناظر با این معادله $\lambda = \pm ۱, \pm \sqrt{c}$ هستند. از این رو، این معادله برای مقادیر بزرگ c در رده مسایل سخت[1] قرار می‌گیرد. معادله دیفرانسیلی سخت، معادله دیفرانسیلی است که روش‌های مشخص در حل عددی آن ناپایدار هستند، مگر این که پارامتر طول گام بسیار کوچک باشد. در جدول ۶ نتایج اجرای روش هم‌مکانی و روش‌های پیشنهادی را روی این مساله برای $c = ۴۰۰, ۱۰^{۶}, ۱۰^{۱۲}$ می‌توان دید.

جدول ٦. نتایج حاصل از اجرای روش‌ها روی مساله کانت برای مقادیر مختلف c و m.

c	m	CM		PM1	PM2	PM3
۴۰۰	۵	۷۰/۱e+۰۲	۱۵۶۲/۹e-۰۴	۴/۲۷۰۰e-۰۶	۴/۲۷۰۰e-۰۶	۴/۲۷۰۰e-۰۶
	۱۰	۷۷/۲e+۰۱	۸۲۶۳/۱e-۱۴	۷۴۸۰/۲e-۱۴	۴/۱۴۸۴e-۱۴	۷/۳۶۳۰e-۱۴
	۱۵	۳۶/۳e+۰۳	۷۳۵۴/۶e-۱۶	۵/۳۲۹۱e-۱۶	۴/۸۸۵۰e-۱۶	۶/۲۱۷۲e-۱۶
	۲۵	۴۶/۵e+۰۷	۴۲۷۹/۱e-۱۲	۹/۶۲۰۹e-۱۶	۸/۷۷۶۴e-۱۶	۱/۷۹۸۶e-۱۵
	۳۵	۸۲/۹e+۱۱	۷۷۸۷/۱e-۰۹	۸/۱۴۱۹e-۱۵	۸۳۹۸/۱e-۱۴	۸۳۳۱/۱e-۱۴
۱e+۰۶	۵	۳۵/۱e+۰۱	۱۰۹۸/۷e-۰۵	۲/۳۰۷۳e-۰۶	۲/۳۰۷۳e-۰۶	۲/۳۰۷۳e-۰۶
	۱۰	۶۴/۲e+۰۱	۹/۶۹۳۴e-۱۴	۷/۱۲۳۲e-۱۴	۷/۱۵۲۱e-۱۴	۷/۰۹۸۷e-۱۴
	۱۵	۹۰/۲e+۰۳	۵۸۵۷/۸e-۱۶	۹/۵۴۷۹e-۱۶	۶/۴۳۹۳e-۱۶	۶/۶۶۱۳e-۱۶
	۲۵	۸۶/۴e+۰۷	۷۹۱۰/۱e-۱۴	۱/۵۹۸۷e-۱۵	۱/۳۱۰۱e-۱۵	۶/۲۱۷۲e-۱۶
	۳۵	۱۰/۹e+۱۱	۵۲۹۶/۱e-۱۱	۱/۷۳۱۹e-۱۵	۲/۰۲۰۶e-۱۵	۵۶۷۰/۱e-۱۵

[1] Stiff equations

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.6.6]

۱e+۱۲	۵	۳۵/۱e+۰۱	۱۰۵۹/۷e-۰۵	۲/۳۰۶۸e-۰۶	۲/۳۰۶۸e-۰۶	۲/۳۰۶۸e-۰۶
	۱۰	۶۴/۲e+۰۱	۶۹۶۷/۲e-۱۴	۷/۱۳۲۱e-۱۴	۷/۲۱۶۵e-۱۴	۷/۲۱۶۴e-۱۴
	۱۵	۹۰/۲e+۰۳	۴۷۷۱/۵e-۱۶	۴/۸۸۵۰ e-۱۶	۴/۴۴۰ ۹e-۱۶	۴/۲۱۸۸e-۱۶
	۲۵	۸۶/۴e+۰۷	۹۱۳۲/۲e-۱۴	۱/۰ ۴۳۶e-۱۵	۷/۹۹۳۶e-۱۶	۱/۶۴۳۱e-۱۵
	۳۵	۱۰/۹e+۱۱	۳۹۲۵/۱e-۱۱	۱/۷۹۸۶e-۱۵	۱/۴۴۳۳e-۱۵	۱/۲۶۵۷e-۱۵

مقادیر ویژه متناظر با معادله دیفرانسیل ۱۳ برابرند با $\lambda = ۰, \pm ۱, \pm\sqrt{c}$. از این رو، این معادله همانند مساله کانت برای مقادیر بزرگ c در رده مسایل سخت قرار می‌گیرد. برای این مساله، نتایج حاصل از اجرای روش‌های هم‌مکانی و پیشنهادی با $c = ۴۰۰, ۱۰^{۶}, ۱۰^{۱۲}$ در جدول ۷ دیده می‌شوند.

جدول‌های ۱ تا ۷ نشان می‌دهند که روش‌های مبتنی بر بهینه‌سازی روی مسایل آزمون توانسته‌اند به جوابی با خطای میانگین قابل قبول و بسیار کوچک‌تر نسبت به روش هم‌مکانی برسند. به ویژه در مورد دو مساله سخت ۱۲ و ۱۳، روش‌های پیشنهادی ما برای مقادیر بسیار بزرگ c نیز جواب‌هایی با دقت بالا به دست آورده‌اند. این نشان‌دهنده کارایی روش‌های پیشنهاد شده در این مقاله برای حل انواع معادلات دیفرانسیل خطی با شرایط مقدار اولیه و یا مرزی است.

جدول ۷. نتایج حاصل از اجرای روش‌ها روی مساله ۱۴ برای مقادیر مختلف c و m.

c	m	CM		PM1	PM2	PM3
۴۰۰	۵	۰۵/۴e+۰۱	۴/۷۱۹۳e-۰۶	۴/۷۱۹۳e-۰۶	۴/۷۱۹۳e-۰۶	۴/۷۱۹۳e-۰۶
	۱۰	۱/۱۷e+۰۱	۸/۵۸۴۲e-۱۳	۶/۶۱۹۲e-۱۴	۶/۶۱۹۲e-۱۴	۶/۶۱۹۲e-۱۴
	۱۵	۲/۷۲e+۰۲	۲/۸۱۲۶e-۱۵	۸/۴۶۱۵e-۱۶	۶/۶۱۷۷e-۱۶	۵/۴۸۴۵e-۱۶
	۲۵	۵/۵۴e+۰۶	۱/۱۲۰۲e-۱۳	۶/۷۱۰ ۲e-۱۵	۸/۳۸۳۷e-۱۵	۱/۷۰۸۴e-۱۴
	۳۵	۱/۰ ۴e+۱۱	۱/۴۶۸۶e-۱۰	۳/۳۰ ۲۶e-۱۴	۵/۳۸۳۷e-۱۴	۶/۳۲۰ ۱e-۱۴
۱e+۰۶	۵	۰۵/۴e+۰۱	۴/۷۱۹۳e-۰۶	۴/۷۱۹۳e-۰۶	۴/۷۱۹۳e-۰۶	۴/۷۱۹۳e-۰۶
	۱۰	۱/۱۲e+۰۲	۴/۵۰ ۳۹e-۱۲	۱/۵۸۷۸e-۱۳	۱/۵۸۸۹e-۱۳	۱/۵۸۸۹e-۱۳
	۱۵	۱/۳۰ e+۰۲	۹/۴۱۴۷e-۱۵	۱/۰۹۸۱e-۱۵	۳/۹۹۶۸e-۱۵	۵/۳۲۹۱e-۱۵
	۲۵	۱/۹۰ e+۰۶	۳/۳۹۲۴e-۱۴	۴/۷۵۱۸e-۱۵	۱/۳۸۱۱e-۱۵	۸/۵۶۴۲e-۱۵
	۳۵	۳/۳۷e+۱۰	۳/۸۵۶۲e-۱۲	۲/۸۲۷۵e-۱۴	۱/۴۵۴۲e-۱۴	۲/۶۵۱۴e-۱۴
۱e+۱۲	۵	۰۵/۴e+۰۱	۴/۷۱۹۳e-۰۶	۴/۷۱۹۳e-۰۶	۴/۷۱۹۳e-۰۶	۴/۷۱۹۳e-۰۶
	۱۰	۱/۱۱e+۰۲	۴/۴۷۱۸e-۱۲	۱/۵۸۹۸e-۱۴	۱/۵۹۰ ۱e-۱۳	۱/۵۹۰ ۱e-۱۳
	۱۵	۱/۳۰ e+۰۲	۹/۴۰۰۰ e-۱۵	۲/۹۵۳۲e-۱۶	۶/۳۵۲۹e-۱۶	۴/۰ ۱۹۰ e-۱۶
	۲۵	۱/۹۰ e+۰۶	۳/۲۷۲۹e-۱۴	۷/۹۵۱۶e-۱۶	۱/۳۰ ۱۲e-۱۵	۱/۲۹۲۳e-۱۵
	۳۵	۳/۳۷e+۱۰	۳/۸۱۰۷e-۱۲	۶/۷۲۴۳e-۱۵	۲/۸۸۰ ۱e-۱۴	۳/۷۹۹۸e-۱۴

بدیهی است که استفاده از جدول‌ها برای مقایسه کارایی چند الگوریتم نسبت به هم ساده نیست و برای این کار ابزار مناسب‌تری مورد نیاز است. با گسترش الگوریتم‌های عددی مختلف، معرفی یک معیار عملی و مناسب برای مقایسه کارایی الگوریتم‌ها نیز مورد توجه قرار گرفت. یکی از معیارهایی که مورد استقبال واقع شد، معیار ارایه‌شده توسط دولان و موره است [۱۶]. در این معیار با انتخاب خطای کوچک‌تر به عنوان معیار مقایسه کارایی الگوریتم‌ها، تعریف می‌شود:

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.6.6]

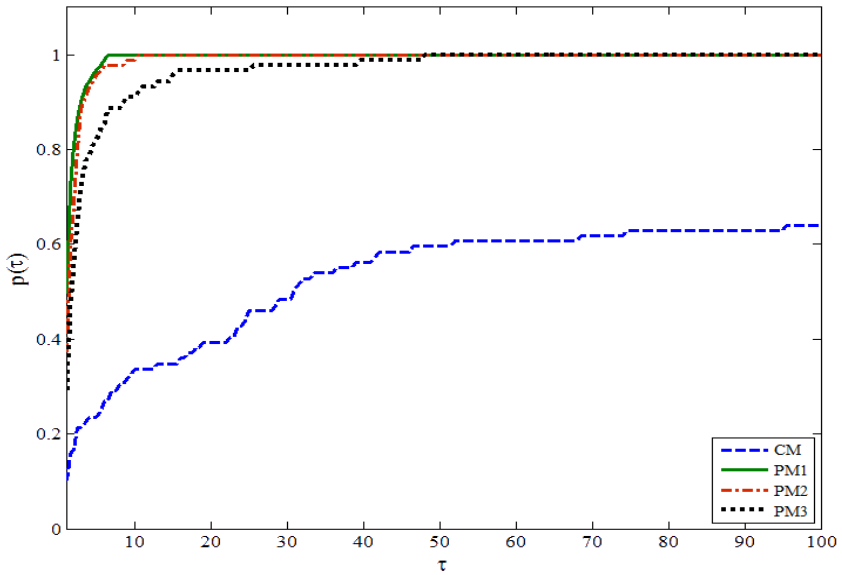
$$\rho_{i,p} = \frac{E_{i,p}}{\min\limits_{1 \le j \le n_a} \{E_{j,p}\}}$$

که در آن، $E_{i,p}$ خطای الگوریتم شماره i روی مساله شماره p و n_a تعداد الگوریتم‌های مورد مقایسه است. حال با تعریف $N_i(\tau) = \{ j \mid p_{i,j} \le \tau,\ 1 \le j \le n_p \}$ که n_p تعداد مسایل آزمون است، تابع کارایی برای الگوریتم شماره i را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$p_i(\tau) = \frac{|N_a(\tau)|}{n_p}$$

به بیان ساده، $p_i(\tau)$ برای مقادیر مختلف $\tau \ge 1$ این احتمال را نشان می‌دهد که خطای الگوریتم i کوچک‌تر یا مساوی τ برابر کوچک‌ترین خطا در میان الگوریتم‌های مورد مقایسه باشد. بحث بیشتر در مورد خواص تابع $p_i(\tau)$ را می‌توان در [۱۶] دید. بدیهی است که با توجه به این معیار در مقایسه عملکرد دو الگوریتم، الگوریتمی کارایی بهتر دارد که نمودار $p_i(\tau)$ آن بالاتر از نمودار متناظر با الگوریتم دیگر قرار بگیرد و البته هر چه اختلاف بین دو نمودار بیش‌تر باشد، تفاوت بیشتری بین کارایی دو الگوریتم روی مسایل مورد آزمون وجود داشته است.

نمودارهای شکل ۱ سطح کارایی الگوریتم‌های CM، PM1، PM2 و PM3 را روی تمامی مسایل آزمون نشان می‌دهند.



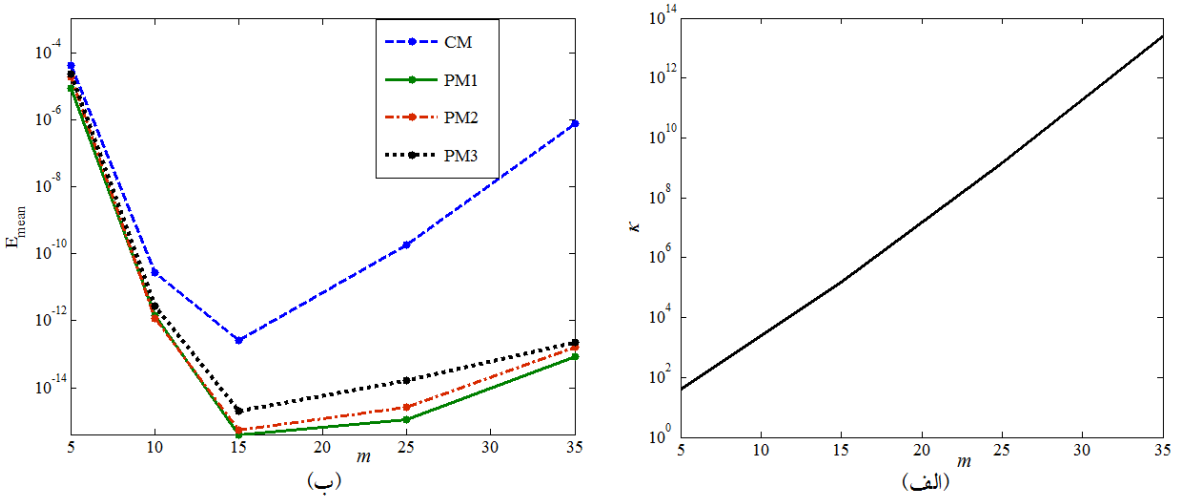
شکل ۱. نمودارهای عملکرد الگوریتم‌های CM، PM1، PM2 و PM3 با معیار خطای میانگین

نمودارهای شکل ۱ به خوبی نشان می‌دهند که الگوریتم‌های پیشنهادی مبتنی بر بهینه‌سازی ما نسبت به روش هم‌مکانی عملکرد بهتری داشته‌اند. در این میان، به ترتیب الگوریتم‌های PM1، PM2 و سپس PM3 بهترین عملکردها را نشان داده‌اند. توجه به این نکته مهم است که در اغلب مسایل خطای روش‌های بهینه‌سازی (به ویژه دو روش کمینه‌سازی مجموع مربعات خطا، PM1، و کمینه‌سازی مجموع خطا، PM2) خیلی به هم نزدیک بوده است. به عبارتی، احتمال این که خطای یکی از این روش‌ها بیش‌تر از (حدودا) ۵۰ برابر خطای دیگری نباشد بسیار نزدیک به ۱ است.

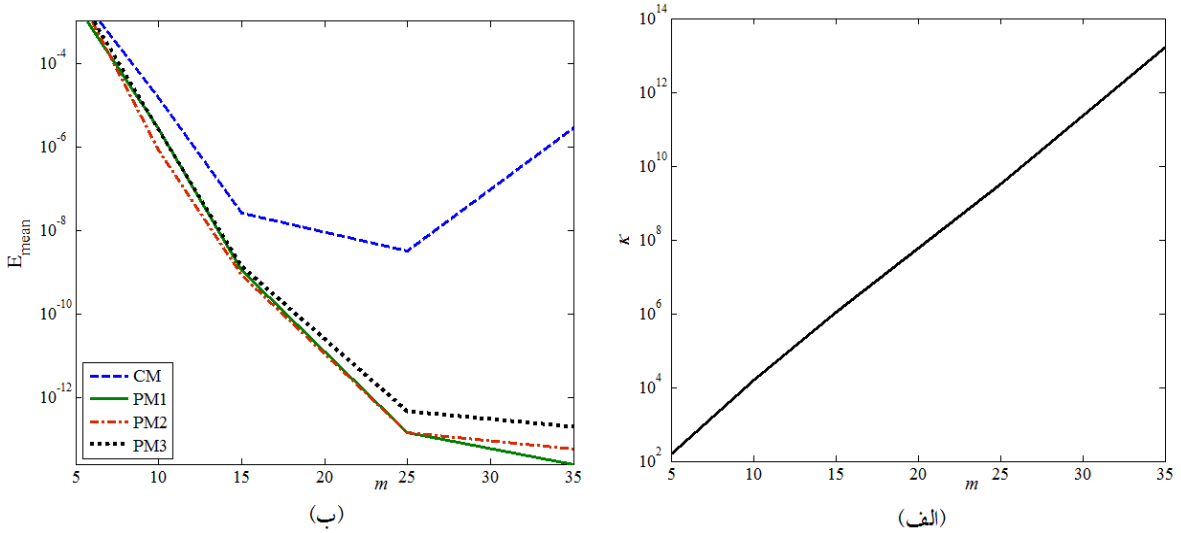
[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.6.6]

نکته بسیار مهم دیگری که از مشاهده نتایج می‌توان دریافت، بحث پایداری عددی روش‌ها با بزرگ‌تر شدن مرتبه تابع تقریب، یعنی m، است. به طور معمول انتظار داریم با افزایش m دقت تقریب بهتر شده و خطا کوچک‌تر شود. با این حال، در روش‌های هم‌مکانی اغلب با افزایش m ماتریس ضرایب بدحالت شده و مشکلات عددی باعث کاهش دقت می‌شوند. از این رو، این روش‌ها بدون در نظر گرفتن تمهیدات لازم، از نظر عددی ناپایدار خواهند بود. شکل‌های ۲ و ۳ در زیر روند بهبود دقت جواب تقریبی با افزایش m را برای الگوریتم‌های مورد مقایسه نشان می‌دهند. ما دو مساله ۱ و ۱۰ را به عنوان نمونه در نظر گرفتیم. برای مسایل دیگر هم وضعیت به صورت مشابه است. توجه داشته باشید که در رایانه‌ای که ما آزمایش‌ها را در آن انجام دادیم دقت ماشین برابر $\varepsilon_{mach} = ۲/۲۲۰۴e-۱۶$ بوده است.



شکل ۲. (الف) نمودار افزایش عدد حالت ماتریس ضرایب و (ب) نمودارهای تغییرات در دقت جواب‌های تقریبی روی مساله ۱.



شکل ۳. (الف) نمودار افزایش عدد حالت ماتریس ضرایب و (ب) نمودارهای تغییرات در دقت جواب‌های تقریبی روی مساله ۱۰.

همان‌گونه که شکل‌های ۲ و ۳ نشان می‌دهند، با افزایش m عدد حالت به طور تقریبا خطی و با نرخ نسبتا بزرگی رشد می‌کند. در همین حال، دقت الگوریتم CM ابتدا بهترشده و سپس به شکل ناامیدکننده‌ای خراب می‌شود که نشان از ناپایداری عددی این روش دارد. در حالی که الگویتم‌های PM1، PM2 و PM3 هنگامی که

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.6.6]

به بهترین دقت خود (متناسب به دقت ماشین) رسیدند، با افزایش m دقت جواب را تا حد زیادی حفظ می‌کنند. بنابراین، این الگوریتم‌ها پایداری بسیار بهتری نسبت به الگوریتم هم‌مکانی دارند.

جدول ۸ خطای بیشینه روش‌های پیشنهادی و برخی روش‌های ارایه‌شده در پژوهش‌های دیگر را برای مقایسه ارایه می‌دهد. روش‌های مورد مقایسه عبارتند از: تقریب کسری با استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین [۵]، تبدیل معادله دیفرانسیل به معادله انتگرال و حل تقریبی آن توسط بسط تیلور [۱۷] و [۱۸]، هم‌مکانی بر اساس بی‌اسپلاین مکعبی برای حل معادلات نامنفرد لین-امدن [۱۹] (مساله آزمون ۶ از رده معادلات نامنفرد لین-امدن است که مشکل اصلی آن‌ها نامنفرد بودن معادله در $x=0$ می‌باشد)، هم‌مکانی بر اساس توابع چبیشف کسری [۲۰] و [۲۱] ، استفاده از اسپلاین سپتیک[1] [۲۲] و روش سینک-گالرکین[2] [۲۳]. برای مقایسه، ما m را طوری انتخاب کردیم که با درجه تقریب در روش مورد مقایسه متناسب باشد. منبع هر یک از روش‌های مورد مقایسه در جدول ۸ ارایه شده است.

جدول ۸. مقایسه نتایج حاصل روش‌های پیشنهادی با روش‌های دیگر.

PN	m	PM1	PM2	PM3	$E_{\max}$	منبع
۱	۱۰	۲/۹۵۲۱e-۱۲	۲/۳۴۷۷e-۱۲	۵/۷۴۹۶e-۱۲	۳/۶۰۸۰e-۰۸	[۵]
۲	۲۰	۱/۶۳۶۶e-۰۹	۱/۶۰۵۲e-۰۹	۲/۷۵۲۰e-۰۹	۷/۷۵۳۵e-۰۷	[۱۸]
۳	۷	۳/۷۶۲۵e-۰۸	۱/۹۴۱۱e-۰۸	۶/۳۸۱۹e-۰۸	۲/۰۰۰۰e-۰۳	[۱۸]
۴	۸	۴/۱۳۰۹e-۰۹	۲/۳۶۷۷e-۰۸	۷/۲۸۲۷e-۰۹	۸/۲۸۴۶e-۰۷	[۱۸]
	۱۰	۴/۶۱۸۱e-۱۲	۳/۶۷۶۲e-۱۲	۹/۹۵۰۷e-۱۲	۶/۰۷۱۱e-۰۵	[۱۷]
۵	۱۰	۳/۷۰۰۵e-۰۴	۳/۴۱۲۷e-۰۴	۴/۳۸۱۹e-۰۴	۶/۴۷۱۴e-۰۴	[۱۷]
۶	۵	۳/۳۳۰۷e-۱۶	۴/۴۴۰۹e-۱۶	۱/۳۳۲۲e-۱۵	۳۵۲۵/۹e-۰۵	[۱۹]
۷	۱۰	۵/۷۶۸۳-۰۸	۸/۳۲۰۴e-۰۸	۴/۱۶۵۵e-۰۸	۲/۴۶۹۸e-۰۴	[۱۷]
۸	۷	۱/۷۰۹۴e-۰۴	۴/۹۳۹۱e-۰۴	۴/۲۴۴۵e-۰۴	۱/۳۰۹۹e-۰۲	[۲۰]
	۱۲	۸/۷۳۸۰e-۰۸	۱/۱۲۶۶e-۰۷	۹/۷۳۵۰e-۰۸	۷۳۵/۶۵۵e-۰۶	[۲۱]
۹	۱۶	۵/۷۹۶۱e-۱۰	۸/۲۳۳۲e-۱۰	۸۸۵۲/۲e-۱۵	۵۵۶۶/۳e-۰۸	[۲۱]
۱۰	۱۵	۷/۲۰۳۱e-۱۳	۶/۸۹۲۳e-۱۳	۷/۴۷۸۵e-۱۳	۸/۶۸۰۰e-۰۷	[۲۲]
۱۱	۱۵	۱/۱۲۷۶e-۱۶	۵/۱۵۱۱e-۱۷	۱/۰۵۸۲-۱۶	۵/۰۰۰۰e-۰۶	[۲۳]

برای مساله شماره ۱۲ (مساله سخت کانت)، نتایج به‌دست آمده از سه روش پیشنهادی با $m=15$ و روش‌های هم‌مکانی متعامد براساس چندجمله‌ای‌های ژاکوبی و لژاندر [۲۴] را برای $c=400, 10^6, 10^{12}$ می‌توان در جدول ۹ مشاهده کرد. هم‌چنین برای مساله شماره ۱۳، نتایج به دست آمده از روش‌های پیشنهادی با $m=15$ و روش‌های اختلال هموتوپی [۲۵]، مجانب هموتوپی بهینه [۲۶] و هم‌مکانی موجک لژاندر [۲۷] به ازای مقادیر مختلف c در جدول ۱۰ ارایه شده‌اند.

[1] Septic spline
[2] Sinc-Galerkin method

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.6.6]

جدول ۹. مقایسه نتایج روش‌های پیشنهادی و روش‌های هم‌مکانی متعامد [۲۴] روی مساله ۱۲.

c	PM1	PM2	PM3	[۲۴]	
				Jacobi	Legendre
۴۰۰	۱/۵۵e−۱۵	۱/۱۱e−۱۵	۹/۶۸e−۱۶	۱/۲۰ e−۱۲	۹/۱۰e−۱۲
۱e+۶	۲/۰۰e−۱۵	۱/۷۸e−۱۵	۱/۱۳e−۱۵	۱/۴۹ e−۱۲	۹/۸۲ e−۱۲
۱e+۱۲	۱/۱۱e−۱۵	۱/۳۳e−۱۵	۱/۱۱e−۱۵	۱/۴۹ e−۱۲	۹/۶۹e−۱۰

جدول ۱۰. مقایسه نتایج روش‌های پیشنهادی و برخی روش‌های دیگر روی مساله ۱۳.

c	PM1	PM2	PM3	[۲۵] HPM	[۲۶] OHAM	[۲۷] LWC
۱e+۰۰	۲/۸e−۱۵	۲/۴e−۱۵	۱/۶e−۱۵	۸/۶e−۰۸	۱/۷e−۱۰	۴/۶e−۱۴
۱e+۰۱	۳/۸e−۱۵	۲/۶e−۱۵	۱/۶e−۱۵	۳/۴e−۰۵	۱/۲e−۰۶	۴/۳e−۱۴
۱e+۰۲	۳/۴e−۱۵	۳/۱e−۱۵	۱/۳e−۱۵	۹/۲e−۰۳	۱/۴e−۰۶	۳/۰e−۱۴
۱e+۰۳	۱/۴e−۱۵	۱/۳e−۱۵	۱/۲e−۱۵	۱/۰e−۰۱	۵/۸e−۰۶	۱/۰e−۱۳

نتایج ارایه شده در جدول‌های ۹، ۱۰ و ۱۱ نشان می‌دهند که خطای بیشینه روش‌های پیشنهاد شده در این مقاله بسیار کوچک‌تر از نتایج به‌دست آمده توسط روش‌های مورد مقایسه روی مسایل متناظر است. هم‌چنین، برخلاف روش‌هایی مانند اختلال هموتوپی، مجانب هموتوپی بهینه و حتی روش هم‌مکانی متعامد که با بزرگ شدن پارامتر اختلال c (یا به طور هم‌ارز درجه سختی معادله) دقت جواب کاهش پیدا می‌کند، در روش‌های پیشنهادی ما با بزرگ شدن درجه سختی دقت جواب کاهش نمی‌یابد و این، کارایی روش‌ها را برای حل این دسته از مسایل نیز نشان می‌دهد.

٦ نتیجه‌گیری

در این مقاله، ما سه روش مبتنی بر بهینه‌سازی را با استفاده از روش هم‌مکانی چندجمله‌ای‌های برنشتاین برای حل معادلات دیفرانسیل خطی از مرتبه دلخواه با شرایط اولیه یا مرزی ارایه کردیم. جواب‌های محاسبه‌شده به ویژه هنگامی که جواب برای برخی محاسبات دیگر که در آن‌ها دقت و سرعت بالای ارزیابی مورد نیاز باشد، مناسب است. این هزینه محاسباتی بیشتر برای محاسبه چنین جوابی را کاملا توجیه می‌کند.

در روش‌های هم‌مکانی، اغلب با بزرگ شدن درجه تقریب نقاط هم‌مکانی زیادی به هم نزدیک می‌شوند و ماتریس ضرایب در دستگاه معادلات هم‌مکانی بدشرط می‌شود. این باعث بروز مشکلات عددی و کاهش در دقت جواب تقریبی می‌شود. چنین مشکلی در روش‌های پیشنهادی ما پدید نمی‌آید و نه تنها به جواب‌های دقیق‌تری می‌رسند، بلکه با بزرگ شدن درجه تقریب روش‌ها پایداری خوبی دارند. به منظور تایید کارایی روش‌ها مسایل آزمون گوناگون در نظر گرفته شد. نتایج به دست آمده با نتایج روش هم‌مکانی استاندارد و نتایج گزارش شده از روش‌های تقریب کسری با استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین، تبدیل معادله دیفرانسیل به معادله انتگرال و حل تقریبی آن توسط بسط تیلور، هم‌مکانی بی‌اسپلاین مکعبی، هم‌مکانی توابع چبیشف کسری،

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.6.6]

اسپلاین سپتیک، روش سینک-گالرکین، اختلال هموتوپی، مجانب هموتوپی بهینه و هم‌مکانی موجک لژاندر مورد مقایسه قرار گرفت. نتایج نشان دادند که روش‌های پیشنهادی دارای دقت بسیار خوب، کارایی و پایداری بالایی هستند.

منابع

[۱۳] دهقان، ر.، کیانپور، م.، (۱۳۹۶). استفاده از بهینه‌سازی نیمه معین مثبت برای حل مسئله‌ی کنترل بهینه‌ی سیستم‌های کنترلی راکتورهای مخزن همزن پیوسته‌ی همدما، مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۴(۱)، ۱۳-۱.

[۱۴] محمودی تهرانی، ع.، کیانپور، م.، (۱۳۹۴). بهینه‌سازی هندسی تحت معادلات با مشتقات جزیی با داده‌های تصادف، مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۲(۲)، ۳۷-۵۹.

[1] Funaro, D. (1992). Polynomial approximations of differential equations, New York: Springer-Verlag.

[2] Lorentz, G. G. (1986). Bernstein polynomials, New York: Chelsea Publishing.

[3] Bhatti, M. I., Bracken, P. (2007). Solutions of differential equations in a Bernstein polynomial basis, J. Comp. Appl. Math. 205, 272-280.

[4] Doha, E. H., Bhrawy, A. H., Saker, M. A. (2011). On the derivatives of Bernstein polynomials: An application for the solution of high even-order differential equations, Boundary Value Problems 2011, 1-16.

[5] Işık, O. R., Sezer, M., Güney, Z. (2011). A rational approximation based on Bernstein polynomials for high order initial and boundary value problems, J. Appl. Math. Comp. 217, 9438-9450.

[6] Bhattacharya, S., Mandal, B. N. (2008). Numerical solution of a singular integro-differential equation, App. Math. Comp. 195, 346- 350.

[7] Farouki, R. T., Goodman, T. N. T. (1996). On the optimal stability of the Bernstein basis, Mathematics of Computation 65(216), 1553-1566.

[8] Gholamian, M., Saberi-Nadjaf, J. (2018). Cubic B-splines collocation method for a class of partial integro-differential equation, Alexandria Engineering Journal 57(3), 2157–2165.

[9] Mamadu, J.E. and Njoseh, I.N. (2016) Tau-collocation approximation approach for solving first and second orders ordinary differential equations, J. Appl. Math. Phys. 4, 383-390.

[10] Öztürk, Y, Gülsu, M. (2016). The approximate solution of high-order nonlinear ordinary differential equations by improved collocation method with terms of shifted Chebyshev polynomials, Int. J. Appl. Comp. Math. 2, 519–531.

[11] Jiang, B.-n., (2012). Least-squares free collocation method mesh, International Journal of Computational Methods 2(9), 1240031.

[12] Mortari, D. (2017). Least-squares solutions of linear differential equations, MDPI Mathematics 5(48), 1-18.

[15] Conte, S. D. (1966). The numerical solution of linear boundary value problems, SIAM Rev. 8, 309-321.

[16] Dolan, E. D., Moré J. J. (2002). Benchmarking optimization software with performance profiles, Math. Program. 91, 201–213.

[17] Li, X. -F. (2007). Approximate solution of linear ordinary differential equations with variable coefficients, Mathematics and Computers in Simulation 75,113-125.

[18] Nadhem, E. (2013). Approximate solution of linear differential equations, Mathematical and Computer Modelling 58, 1502-1509.

[19] Parsaeitabar, Z., Nazemi, A. R. (2017). A third-degree B-spline collocation scheme for solving a class of the nonlinear Lane-Emden type equations, Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics 12(2), 15-34.

[20] Sezer, M., Gulsu, M., Tanay, B. (2010). Rational Chebyshev collocation method for solving higher-order linear ordinary differential equations, Wiley Online Library, DOI 10.1002/ num.20573.

[21] Ramadan, M. A., Raslan, K. R., Nassar, M. A. (2014). An approximate analytical solution of higher-order linear differential equations with variable coefficients using improved rational Chebyshev collocation method, Appl. Comp. Math. 3(6), 315-322.

[22] Siddiqi, S. S., Akram, G. (2008). Septic spline solutions of sixth-order boundary value problems, J. Comp. Appl. Math. 215, 288-301.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.6.6]

[23] El-Gamel, M., Cannon, J. R., Zayed, A. I. (2003). Sinc-Galerkin method for solving linear sixth-order boundary value problems, Mathematics and Computation 73, 1325-1343.
[24] Serth, R. W. (1975). Solution of stiff boundary value problems by orthogonal collocation, International Journal for Numerical Methods in Engineering 9, 691-699.
[25] Noor, M. A., Mohyud-Din, S. T. (2008). Homotopy perturbation method for solving sixth-order boundary value problems, Comput. Math. Appl. 55, 2953-2972.
[26] Idrees, M., Haq, S., Islam, S.(2010). Application of optimal homotopy asymptotic method to special sixth order boundary value problems, World Appl. Sci. J. 9,138-143.
[27] Sohaib, M., Haq, S., Mukhtar, S., Khan, E. (2018). Numerical solution of sixth-order boundary value problems using Legendre wavelet collocation method, Results in Physics 8**,** 1204–1208.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2020.17.3.6.6]