

## ارزیابی غیر پارامتری صرفه جویی های ناشی از وسعت: مطالعه مروری

سهراب کردرستمی<sup>۱</sup>، منیره جهانی صیادنویری<sup>۲\*</sup>، حمیرا امیرمحمدی<sup>۳</sup>

۱- استاد، گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

۲- دکتری، گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

۳- استادیار، گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

رسید مقاله: ۱۸ آبان ۱۳۹۹

پذیرش مقاله: ۱۵ فروردین ۱۴۰۰

### چکیده

صرفه جویی های ناشی از وسعت زمانی وجود دارد که هزینه های تولید توام چندین کالا و قسمت کمتر از تولید آنها به طور جداگانه باشد که این مفهوم در ارزیابی عملکرد بانک ها، بیمارستان ها، دانشگاه ها و .. از اهمیت به سزایی برخوردار است. به طور کلی صرفه جویی های ناشی از وسعت برای ارزیابی کارایی سازمان های چندمحصولی با اهمیت است. در این تحقیق پس از تعریف دقیق صرفه جویی های ناشی از وسعت مروری بر چندین روش غیر پارامتری حاضر برای بررسی مفهوم صرفه جویی های ناشی از وسعت می شود. در واقع روش های مبتنی بر تحلیل پوششی داده های موجود به منظور مطالعه صرفه جویی های ناشی از وسعت ارایه می شود.

**کلمات کلیدی:** صرفه جویی های ناشی از وسعت، تحلیل پوششی داده ها، واحدهای چندمحصولی، کارایی.

### ۱ مقدمه

صرفه جویی های واحدهای چند محصولی در تئوری تولید و کسب و کار با اهمیت است. واحدهای چند محصولی، سازمان هایی هستند که چندین محصول را تولید می کنند و بنابراین باید تخصیص منابع به طور مناسب تر را به منظور دستیابی به سطوح تولید بالاتر رسیدگی کنند.

پانزر و ویلینگ [۱] و بامول و همکاران [۲] مفهومی از صرفه جویی های ناشی از وسعت را با اندازه گیری مزایا (بر حسب کاهش هزینه) برای یک واحد به منظور تولید بیش از یک محصول پیشنهاد کردند. فار [۳، ۴] روش بامول و همکاران [۲] را به منظور استفاده با تحلیل پوششی داده ها توسعه دادند و سپس گروسکوف و یاساورنگ [۵] به کارگیری تحلیل پوششی داده ها را برای نماینده های خدمات عمومی تعدیل دادند به منظور تعیین زمانی که برخی از نمایندگان مجزا با ارایه این خدمات ممکن است به طور سودمند تلفیق شوند. پریور [۶] به ارزیابی سطح کارایی فنی و صرفه جویی های ناشی از وسعت در بیمارستان ها پرداختند. کن و یین [۷] به اندازه گیری

\* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: monirehjahani@yahoo.com

صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت برای سیستم‌های ایجاد دو نوع انرژی (گرما و برق) از یک نوع سوخت (تولید ترکیبی) در کره پرداختند. موریتا<sup>۱</sup> [۸] با مقایسه مرزهای کارا به سنجش صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت پرداختند. هاجرگشت و همکاران [۹] یک شاخص مبتنی بر مشتق صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت با بهره‌گیری دوالیتی بین تابع هزینه سایه و تابع فاصله ورودی به دست آوردند. فار و کاراگینس<sup>۲</sup> [۱۰] نشان دادند که شرط لازم و کافی برای صرفه‌جویی‌های وسعت این است که کارایی فنی فرایند تولید مشترک کمتر یا مساوی با مجموع موزون کارایی‌های فنی فعالیت‌های منحصربه‌فرد باشد. چاوز<sup>۳</sup> و همکاران [۱۱] با تمرکز بر تجزیه صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت به تحلیل اقتصادی صرفه‌جویی‌های وسعت در دانشگاه‌های امریکا پرداختند. آنها در بررسی خود از روش غیرپارامتری تحلیل پوششی داده‌ها استفاده کردند. شاو و تن<sup>۴</sup> [۱۲] به سنجش صرفه‌جویی‌هایی ناشی از مقیاس و وسعت در محیط غیررقابتی با عدم قطعیت قیمت پرداختند. دو مدل هزینه تحلیل پوششی داده‌ها با توجه به عدم تقسیم‌پذیری فرایند ناشی از فرایندهای تولیدی خاص از واحد چند محصولی یکی بر اساس مجموعه تکنولوژی مبتنی بر فاکتور و دیگری بر پایه مجموعه تکنولوژی مبتنی بر هزینه ارایه شد.

صرفه‌جویی‌هایی ناشی از مقیاس و وسعت هر دو مفاهیمی از علم اقتصاد هستند و هر دو برای کسب و کاری که می‌خواهد ترقی کند و خدمات بهتر به مشتریان ارایه دهد بسیار مفید است. صرفه‌جویی‌های ناشی از مقیاس زمانی رخ می‌دهد که یک کمپانی به یک مرحله‌ای از تولید می‌رسد که هزینه تولید دیگر افزایش نمی‌یابد بلکه کاهش می‌یابد که در تولید انبوه رخ می‌دهد. از طرف دیگر صرفه‌جویی‌هایی ناشی از وسعت زمانی رخ می‌دهد که یک کمپانی محصولات متنوعی را تولید می‌کند و با توجه به آن هزینه تولید کاهش می‌یابد. اگرچه هر دو صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت و مقیاس به کاهش هزینه تولید واحد کمک می‌کنند اما آنها اختلاف زیادی دارند.

تفاوت‌های اساسی آنها عبارت است از:

- ❖ صرفه‌جویی‌های ناشی از مقیاس در مورد افزایش واحدهای تولید است اما صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت در مورد تنوع تولید است.
- ❖ صرفه‌جویی‌های ناشی از مقیاس به یک سازمان کمک می‌کند که هزینه‌های متوسط در هر واحد را در نظر بگیرد و به تدریج مقدار را افزایش می‌دهد تا هزینه‌های متوسط در هر واحد کمینه شود. صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت در حیطه به کارگیری زیربنا به منظور کاهش هزینه‌های متوسط در هر واحد است.
- ❖ صرفه‌جویی‌های ناشی از مقیاس بر یک نوع محصول تمرکز دارد در حالی که صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت بر محصولات متفاوت تمرکز می‌کنند.

<sup>1</sup> Morita

<sup>2</sup> Färe and Karagiannis

<sup>3</sup> Chavas

<sup>4</sup> Sahoo, B.K. and Tone

❖ صرفه‌جویی‌های ناشی از مقیاس بیشتر به ظرفیت تولید یک محصول وابسته است. صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت بیشتر روی شالوده واحد برای تولید چندین محصول تحت یک سرپرستی وابسته است. به عنوان مثالی از صرفه‌جویی ناشی از مقیاس می‌توان به تولید حجم عظیمی از یک نوع تلفن اشاره کرد. به علاوه تولید چندین اقلام غذایی با به کارگیری منابع یکسان را می‌توان به عنوان نمونه‌ای از صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت برشمرد. از جمله مزایای صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت می‌توان به (۱) ترکیب منعطفی از محصولات و طراحی محصول، (۲) پاسخ سریع به تقاضای بازار، طراحی تولید و نرخ خروجی، (۳) کاهش ضایعات و اتلافات و آموزش کمتر که منتهی به کاهش هزینه می‌شود و (۴) کاهش ریسک اشاره کرد.

به کارگیری ظرفیت، مقیاس و وسعت در صنعت بانکداری هند توسط سنگوپتا و شاو<sup>۱</sup> [۱۳] بررسی شده است. همچنین رویکردهایی نو بر پایه تحلیل پوششی داده‌ها برای تحلیل آنها ارائه شده‌اند. به علاوه صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت و به کارگیری ظرفیت با استفاده از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها در [۱۴] مطرح شده است. صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت در سیستم‌های تولید دو مرحله‌ای توسط زینالزاده اهرنجانی و همکاران [۱۵] مورد بررسی قرار گرفته است. ذاکر هرفته و حسین زاده سلجوقی [۱۶] اثربخشی هزینه و صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت را در فرایندهای شبکه‌ای دو مرحله‌ای با منابع تقسیمی و منابع بازایی شده از خروجی‌های نامطلوب مورد مطالعه قرار داده‌اند. به علاوه آنها در تحقیق دیگری [۱۷]، مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها را به منظور تخمین صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت و اثربخشی هزینه در حضور داده‌های بازه‌ای تعمیم دادند.

این مقاله با توجه به اهمیت و نقش موثر صرفه‌جویی‌ها در بازار و همچنین تخمین کارایی و ارزیابی عملکرد سازمان‌ها، مفهوم صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت را شرح می‌دهد. به علاوه چندین روش موجود مبتنی بر رویکرد غیرپارامتری تحلیل پوششی داده‌ها به منظور اندازه‌گیری صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت مرور می‌شود. این پژوهش شامل چهار بخش است. در بخش اول مروری بر مقالات و کارهای تحقیقاتی در ادبیات موضوع شد. در بخش دوم مفهوم صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت بیان و تشریح می‌شود. به علاوه به طور مختصر روش تحلیل پوششی داده‌ها شرح داده می‌شود. در بخش ۳ چندین روش مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌های حاضر به منظور رسیدگی صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت مطرح می‌شود. در بخش چهارم نتیجه‌گیری و پیشنهادها بیان می‌شود.

## ۲ صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت و تحلیل پوششی داده‌ها

### ۲-۱ صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت

صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت عبارت است از شاخص‌های اقتصادی که تولید همزمان محصولات مختلف را نسبت به تولید آنها به تنهایی ارزان‌تر می‌کند. به عنوان مثال، مک دونالد می‌تواند هر دو همبرگر و سیب‌زمینی

<sup>1</sup> Sengupta and Sahoo

سرخ کرده را با هزینه متوسط پایین‌تر از آنچه دو واحد جداگانه برای تولید هر یک از کالاها به طور جداگانه هزینه می‌کنند، تولید کند. دلیل این است که همبرگرهای مک دونالد و سیب زمینی سرخ کرده می‌توانند از ذخیره‌سازی مواد غذایی، امکانات آماده‌سازی و غیره در طول تولید استفاده نمایند.

دو یا چند محصول صرفه‌جویی‌های وسعت را نشان می‌دهند زمانی که هزینه‌های ترکیبی تولید و / یا فروش مقادیر معین از هر یک زمانی که تولید یا فروش آنها به طور مشترک سازمان یافته باشد کمتر از زمانی است که برای هر محصول کاملاً جدا باشد. گفته می‌شود که صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت وقتی وجود دارند که هزینه تولید مقدار معینی از دو یا چند محصول متفاوت در زمانی که آنها در یک سازمان تولید می‌شوند کمتر از زمانی است که به طور جداگانه تولید می‌شوند. این مفهوم توسط پانزر و ویلینگ<sup>۱</sup> در یک مقاله [۱۸] نامگذاری شد، که بخش مربوطه چندین سال بعد منتشر شد [۱].

کار آنها نشان می‌دهد که در شرایط رقابت کامل حضور صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت برای هزینه‌های سازمانی و تولید منجر به واحدهای چندمحصولی می‌شود. مفهوم اصولی این است که یک ورودی مشترک برای تولید محصولات، به این معنی که بعضی یا همه ورودی برای تولید محصولات دیگر بعد از تولید یک محصول باقی می‌ماند. یک نوع دیگری درباره‌ی قضیه ورودی مشترک این است که یک فرآیند تولید یک محصول جانبی ناخواسته (به عنوان مثال گرما) ایجاد می‌کند، که سپس به عنوان ورودی برای فرآیند دیگری در دسترس است. یک نمونه از یک ورودی مشترک برای تولید (به طور گسترده تعریف شده) نیروی فروش است که می‌تواند دو محصول را به طور موثرتری در مقایسه با دو سازمان مجزا بفروشد. مثال‌های دیگر چنین ورودی‌هایی می‌تواند فاکتورهای تولید فیزیکی باشد، مانند یک ژنراتور برق با ظرفیتی بیشتر از آن که برای تولید یک محصول واحد مورد نیاز باشد یا غیرعینی باشد، مانند دانش فنی تولید یا تصویر علامت تجاری شرکتی. همان‌طور که تیس<sup>۲</sup> [۱۹] اشاره کرد، حضور صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت برای تعیین وجود یک شرکت چند محصولی کافی نیست. به طور نظری، تولید مشترک می‌تواند در دو شرکت جداگانه که خدمات ورودی (های) مشترک یا محصولات جانبی را تحت قرارداد به اشتراک می‌گذارند، سازماندهی شود. از سوی دیگر، ممکن است خدماتی از ورودی‌های مشترک توسط یک تامین‌کننده شخص ثالث اجاره شود.

ادغام عمودی شامل یک کمپانی واحد است که دارای مالکیت و کنترل دو یا چند مرحله زنجیره تامین مانند تولید و توزیع، یا قطعات (اجزا) و مونتاژ است. ادغام عمودی زمانی وجود دارد که هر دو مرحله از زنجیره تامین ورودی به انتهای کاربر تحت مالکیت مشترک و کنترل یک سازمان واحد آورده شوند. اغلب، منطق ادغام عمودی عبارت است از جبران عدم وجود یا کمبود قرارداد مبتنی بر بازار است. اقدامات مدیریتی و دستورات درون شرکت عمودی یکپارچه برای دستیابی به هماهنگی لازم به جای قراردادهای بلند مدت استفاده می‌شود.

تنوع بخشی عبارت است از فعالیتی از توسعه یک کسب و کار یک واحد به محصول جدید، بازارهای جغرافیایی یا عمودی. تنوع در چندین بعد، از جمله بازار محصولات، بازارهای جغرافیایی و عمودی رخ می‌دهد.

<sup>1</sup> Panzar and Willig

<sup>2</sup> Teece

تنوع در بازار محصول زمانی اتفاق می افتد که یک شرکت تصمیم به ارائه محصولات یا خدمات جدیدی می کند که شامل بخش های بازاری می شوند به غیر از آنهایی که در حال حاضر در آنها فعال است. فعالیت های جدید ممکن است ورودی های مشترک با فعالیت های موجود را به اشتراک بگذارند یا نگذارند.

حوزه سازمان عبارت است از حیطه فعالیت های تقبل شده توسط یک واحد و نه از طریق قرارداد با واحدهای مجزا که اغلب به خطوط تولید اشاره می شود و نه به تعمیم ادغام عمودی واحد بین یک خط تولید معین. منطق اقتصادی برای توسعه ای در یک حوزه شرکت توسط تیس [۱۹] ارائه شد. تیس دریافت که صرفه جویی هایی از وسعت در بیشتر موارد نمی توانند وجود واحدهای چندمحصولی را توضیح دهند زیرا قراردادهای عادی در میان واحدهای تخصصی به طور کلی برای دستگیری همان صرفه جویی ها به صورت یک واحد چندمحصولی کافی خواهد بود. شرایط زمانی که این برقرار نبود عبارت انداز: (۱) جایی که تولید دو یا چندین محصول وابسته به مبنای دانش چگونگی اختصاصی یکسان است و تبادل مجدد خوانده می شود، و (۲) زمانی که یک دارایی غیرقابل تقسیم تخصصی یک ورودی مشترک در تولید دو یا چندین محصول است. این تحلیل سپس توسط تیس [۲۰] دوباره بسط یافت، که به عوامل متعددی اشاره کرد که می تواند توسعه وسعت سازمان را بدون اشاره به صرفه جویی های ناشی از وسعت توجیه کند. یک عامل عبارت است از فرصتی برای استفاده از منابع کم مصرف برای کار. منابع مفهوم گسترده ای است که شامل اقلام ملموس مانند ماشین آلات و اقلام غیرمستقیم مانند قابلیت های مدیریتی است. برای مثال، خدمات منابع استفاده نشده ممکن است از یادگیری رخ دهد که در طول فعالیت های مورد نیاز برای خطوط موجود از کسب و کار اتفاق می افتد. چون خدمات منابع اغلب در مورد انواع کسب و کارها قابل اجرا هستند، در بعضی موارد واحد می تواند آن را سودآور تشخیص دهد برای ورود به بازار جدیدی که بتواند نوعی از خدمات منابع را استفاده کند که در اختیار دارد. این با یک عامل دوم ترکیب می شود که مساله (هزینه های معامله) خرید و فروش بسیاری از خدمات منابع در یک بازار است. اگر منبع به اندازه کافی تخصصی است، به طوری که تعداد بخش هایی که ممکن است علاقه مند به اجاره خدمات خود باشند بسیار کم است، و در نتیجه به دلیل شرایط نامطلوب در یک قرارداد، ریسک بالا است. به طور کلی بهتر است به جای تعامل با یک شرکت دیگر، واحد استفاده داخلی از خدمات اضافی (به عنوان مثال، توسعه وسعت اش) کند. عامل سوم مشکل انتقال دانش است. یک قرارداد برای انتقال دانش فنی اضافی یک واحد به واحدی که مایل به استفاده از آن در بازار محصولات غیررقابتی است، به طور معمول به انتقال یا حداقل قرض دادن پرسنلی نیازمند می باشد که با جنبه های ضمنی این دانش آشنا باشند. این به طور موثر دانش فنی را از یک کالای غیررقابتی به یک کالای رقابتی تبدیل می کند، یعنی یکی به دلیل استفاده در یک بخش استفاده از آن توسط سایر بخش ها را محدود می کند. اگر دانش در سازمان به منظور گسترش وسعت به کار گرفته شود و نه فروختن آنگاه مساله کالای رقابتی کمتر رخ می دهد. این تحلیل ممکن است به این معنا باشد که اگر همه مدیران حداکثرکننده سود منطقی باشند، آنگاه تمام تنوع پذیری محصول باید به نوعی به خطوط موجود در کسب و کار مرتبط باشد. در عمل، اما برخی از واحدها هم پیمان هستند، با تقسیمات محصول با عدم اشتراک رابطه عملکردی یا تکنولوژیکی صرف نظر از نظارت مالی مشترک توسط یک دفتر مرکزی. با این حال مطالعه ای در اواسط دهه ۱۹۹۰ [۲۱] دریافت که بیشتر

$$C(y_l, y_r) < C(y_l, \circ) + C(\circ, y_r) \quad (1)$$

$$DES_j = \frac{C(y_1, 0) + C(0, y_2) - C(y_1, y_2)}{C(y_1, y_2)} \quad (2)$$

$DES_j > 0$  بیان کننده این است که واحد  $j$  از صرفه جویی های ناشی از وسعت را نشان می دهد،  $DES_j < 0$  اشاره به عدم صرفه جویی های ناشی از وسعت دارد.  $DES_j = 0$  بدین معنی است که هزینه ها به طور طبیعی جمع پذیر هستند. توجه شود که خروجی های غیر صفر در هر دو طرف (۱) مشابه هستند بنابراین ارزیابی به طور موضعی قابل اجرا است (در همسایگی  $y_1$  و  $y_2$ ).

## ۲-۲ تحلیل پوششی داده ها

تحلیل کارایی، تکنیکی است که برای بررسی و توضیح هزینه های نسبی در میان کارگزاران اقتصادی دیگر استفاده می شود. یک مرز یا به صورت پارامتری با استفاده از رویکرد مرزی تصادفی (SFA)<sup>۱</sup> یا به صورت ناپارامتری با استفاده از روش تحلیل پوششی داده ها (DEA)<sup>۲</sup> اندازه گیری می شود. تجزیه و تحلیل با تخمین میزان فاصله کارگزاران اقتصادی منفرد از مرزهای تخمینی انجام می شود. روش های SFA برای بررسی رفتار تابع هزینه مرزی استفاده شده است. تئوری اقتصادی مکانیسم هایی را برای کشف ساختار هزینه بدون توجه به این که مرز با روش های SFA یا DEA اندازه گیری می شود، فراهم می کند. بنابراین، آیا می توان از تجزیه و تحلیل DEA برای ارایه بینشی در مورد این که چگونه شرکت هایی با فناوری مشابه می توانند به سطوح مشابهی از کارایی هزینه و هزینه های متوسط با بررسی شکل مرز دست یابند، استفاده کرد؟ اگر چنین است، روش های DEA باید به شرکت هایی که خارج از مرز فعالیت می کنند اجازه دهد تا با تنظیم اندازه شرکت برای جذب اقتصادهای مقیاس، معاوضه بالقوه بهبود انتخاب های بسته بندی خروجی و ورودی را درک کنند.

رویکرد سنتی برای تخمین صرفه های مقیاس چند محصولی و محصول خاص و صرفه جویی های ناشی از وسعت شامل تعیین یک فرم عملکردی برای مرز هزینه و تخمین پارامترها با استفاده از سیستم های خطای دوطرفه یا با سیستم های خطای یک طرفه است.

رویکرد تحلیل پوششی داده ها، یک مرز خطی تکه تکه با استفاده از یک مساله کمینه سازی هزینه خطی ایجاد می کند. با این روش، نیازی به محدود کردن فناوری تولید با تحمیل یک فرم عملکردی نیست. مرز مطابق با تئوری اقتصادی است؛ زیرا محدودیت های انحنا در تابع تولید/هزینه در فرآیند تخمین با استفاده از محدودیت های نابرابری اعمال می شود. علاوه بر این، روش DEA اجازه می دهد تا فناوری با استفاده از داده های یک سال اندازه گیری شود و نیاز به تغییر قیمت نسبی برای اندازه گیری دقیق فناوری کاهش یابد. [۲۴]

در بخش بعد روش هایی مبتنی بر تحلیل پوششی داده ها به منظور بررسی صرفه جویی های ناشی از وسعت مطرح می شود.

<sup>1</sup> Stochastic frontier approach

<sup>2</sup> Data envelopment analysis

### ۳ تخمین صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها

به منظور بررسی صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت در ساختار تحلیل پوششی داده‌ها چندین روش مرور می‌شود. در ابتدا روش مطرح‌شده در [۱۴] بیان می‌شود. فرض کنید  $n$  واحد تصمیم‌گیرنده متنوع با تولید هر دو محصول ۱ و ۲ وجود دارند که گروه  $D$  نامیده می‌شود. برای بنگاه متنوع  $j$  ام خروجی‌ها و ورودی (هزینه) را به ترتیب با  $y_j = (y_{1j}, y_{2j})$  و  $c_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) نشان می‌دهیم. مجموعه امکان تولید بنگاه‌های متنوع تحت فرض بازده به مقیاس متغیر را به صورت

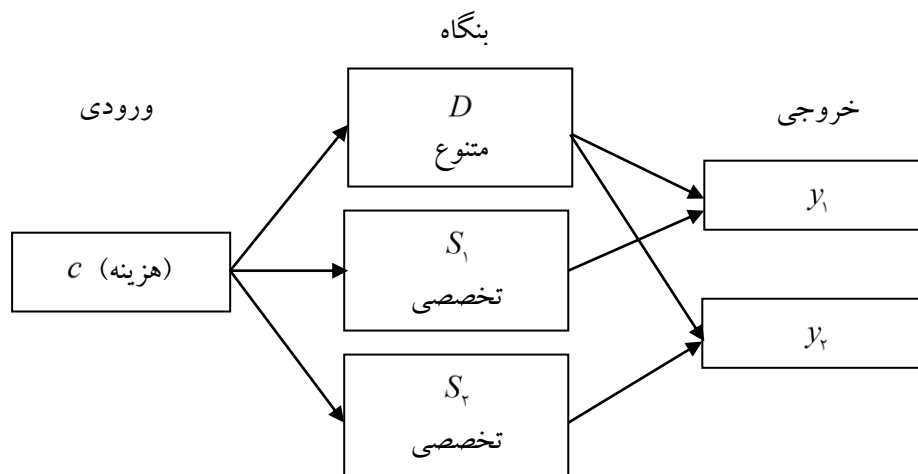
$$P_{\lambda} = \{(c, y) \mid c = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j, y \leq \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j, e\lambda = 1, \lambda \geq 0\} \quad (3)$$

تعریف می‌کنیم.  $c_j \lambda_j$  هزینه کل بنگاه برای تولید هر دو محصول را نشان می‌دهد،  $y_j \lambda_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \end{pmatrix} \lambda_j$  است و  $c$  هزینه کل بنگاه برای تولید  $y$  است. همچنین  $p$  بنگاه تخصصی گروه  $S_1$  وجود دارد که فقط محصول ۱ را تولید می‌کند. این گروه خروجی  $z_{1j}$  را با به کارگیری ورودی (هزینه)  $v_{1j}$  به ازای  $j = 1, \dots, p$  تولید می‌کند. گروه تخصصی دیگر  $S_p$  به ازای  $j = 1, \dots, q$  محصول دوم ( $z_{pj}$ ) را با استفاده از هزینه ( $v_{pj}$ ) تولید می‌کند که  $q$  نشان‌دهنده تعداد واحدهای گروه  $S_p$  می‌باشد. مجموعه‌های امکان تولید آنها به ترتیب به صورت  $P_1$  و  $P_p$  بیان می‌شوند:

$$P_1 = \{(v, z_1) \mid v = \sum_{j=1}^p v_{1j} \lambda_j, z_1 \leq \sum_{j=1}^p z_{1j} \lambda_j, e\lambda = 1, \lambda \geq 0\} \quad (4)$$

$$P_p = \{(v, z_p) \mid v = \sum_{j=1}^q v_{pj} \lambda_j, z_p \leq \sum_{j=1}^q z_{pj} \lambda_j, e\lambda = 1, \lambda \geq 0\} \quad (5)$$

شکل ۲ جریان ورودی و خروجی فوق را نشان می‌دهد.



شکل ۲. بنگاه‌های متنوع و تخصصی

به ازای  $DMU(c_o, y_{1o}, y_{2o}) \in D$ ، مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را برای هر واحد به منظور حذف هر ناکارایی هزینه حل می‌کنیم:



$$\begin{aligned}
 C(y_{10}, y_{20}) &= c_o^* = \min_{\theta, \lambda} c_o \theta \\
 \text{s.t.} \quad &c_o \theta = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + \dots + c_n \lambda_n \\
 &y_{io} \leq y_{i1} \lambda_1 + y_{i2} \lambda_2 + \dots + y_{in} \lambda_n \quad (i=1, 2) \\
 &1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \\
 &\lambda \geq 0
 \end{aligned} \quad (6)$$

فرض کنید جواب بهینه  $c_o^*$  باشد. آنگاه  $(c_o^*, y_{10}, y_{20})$  حداقل  $(y_{10}, y_{20})$  را در هزینه کمینه  $c_o^* = C(y_{10}, y_{20})$  تولید می کند.

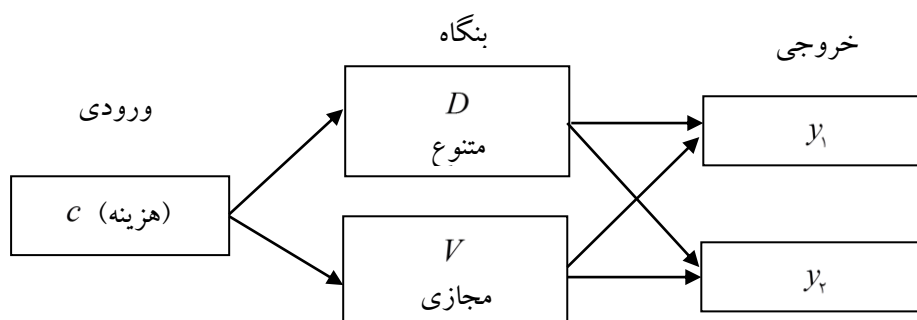
حال صرفه جویی های ناشی از وسعت برای این کارای هزینه  $(c_o^*, y_o)$  به صورت زیر است. ابتدا به منظور مقایسه بنگاه متنوع و تخصصی، یک مجموعه از بنگاه های متنوع مجازی  $V$  با ترکیب دو بنگاه از گروه های  $S_1$  و  $S_2$  ایجاد می کنیم. برای این منظور دو بنگاه با هزینه و خروجی های  $(v_{1k}, z_{1k}) \in S_1$  و  $(v_{2k}, z_{2k}) \in S_2$  را به طور دلخواه انتخاب می کنیم. یک بنگاه متنوع مجازی تشکیل می دهیم که فرض می شود که هر دو محصول ۱  $(z_{1k})$  و ۲  $(z_{2k})$  را با هزینه  $v = v_{1k} + v_{2k}$  تولید می کنند. مجموعه  $V$  از این واحدهای مجازی شامل تمام ترکیبات بنگاه ها در  $S_1$  و  $S_2$  با فرض  $r (= p \times q)$  واحد می باشد.  $V$  را به صورت زیر تعیین می کنیم:

$$V = \{(v_j, z_{1j}, z_{2j}) \mid j = 1, \dots, r (= p \times q)\}. \quad (7)$$

مجموعه امکان تولید متناظر با  $V$  به ازای بنگاه های متنوع مجازی به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_V = \{(c, y_1, y_2) \mid c = \sum_{j=1}^r v_j \lambda_j, y = \sum_{j=1}^r z_j \lambda_j, e \lambda = 1, \lambda \geq 0\} \quad (8)$$

که  $v_j$  مقدار  $v_{1j} + v_{2j}$  است در حالی که  $z_j$  و  $y$  بردارهایی هستند که  $z_j = \begin{pmatrix} z_{1j} \\ z_{2j} \end{pmatrix}$  خروجی  $j$ ام بنگاه متنوع مجازی را و  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  خروجی های یعنی محصولات ۱ و ۲ را نشان می دهند. بنابراین دو مجموعه از بنگاه های متنوع به صورت شکل ۳ نمایش داده می شوند.



شکل ۳. بنگاه های متنوع  $D$  و بنگاه های متنوع مجازی  $V$

کارایی هزینه  $(c_o^*, y_{10}, y_{20})$  نسبت به مجموعه های بنگاه های متنوع مجازی در  $V$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \text{Min } c_o^* \theta \\ & \text{s.t. } \theta c_o^* = v_1 \lambda_1 + v_r \lambda_r + \dots + v_r \lambda_r \\ & \quad y_{1o} \leq z_{11} \lambda_1 + \dots + z_{1r} \lambda_r \\ & \quad y_{ro} \leq z_{r1} \lambda_1 + \dots + z_{rr} \lambda_r \\ & \quad 1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_r \\ & \quad \lambda \geq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

که  $c_o^*$  از (۶) به‌دست آمده است.

فرض کنید مقدار بهینه  $\theta$  با  $\theta^*$  نشان داده شود. با استفاده از این مقدار بهینه  $\theta^*$  (۱۰) را تعریف می‌کنیم:

$$C(y_{1o}, 0) + C(0, y_{ro}) = c_o^* \theta^* \quad (10)$$

چهار حالت زیر را داریم:

- ◆  $\theta^* < 1$  با  $(c_o^*, y_{1o}, y_{ro})$  احاطه می‌شود و بنابراین نسبت به گروه متنوع مجازی  $V$  ناکارا است.
- ◆  $\theta^* = 1$  به طور شعاعی روی مرز کارای  $P_V$  است.
- ◆  $\theta^* > 1$  با  $(c_o^*, y_{1o}, y_{ro})$  احاطه نمی‌شود و بنابراین ابرکارا نسبت به  $V$  است.
- ◆ برنامه‌ریزی خطی فوق جواب شدنی ندارد یعنی  $y_{1o} > \max_{j=1}^r \{z_{1j}\}$  یا  $y_{ro} > \max_{j=1}^r \{z_{rj}\}$  به طوری که  $e\lambda = 1$  برآورد نمی‌شود. در این حالت فرض می‌کنیم  $\theta^* = 1$  و بنابراین

$$C(y_{1o}, 0) + C(0, y_{ro}) = c_o^* = C(y_{1o}, y_{ro}).$$

با استفاده از  $C(y_{1o}, y_{ro})$  و  $C(y_{1o}, 0) + C(0, y_{ro})$  می‌توان صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت موضعی در  $DMU_o$  را با استفاده از شرایط زیر بررسی کرد:

$$(11) \text{ صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت وجود دارد } C(y_{1o}, y_{ro}) < C(y_{1o}, 0) + C(0, y_{ro})$$

$$(12) \text{ بدون گرایش (بی تفاوت) } C(y_{1o}, y_{ro}) = C(y_{1o}, 0) + C(0, y_{ro})$$

$$(13) \text{ عدم صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت وجود دارد } C(y_{1o}, y_{ro}) > C(y_{1o}, 0) + C(0, y_{ro})$$

با عدم قابلیت حل گنجانده‌شده در تفسیر (۱۲).

در هر حالت،  $DES$  با استفاده از (۲) به طریق زیر محاسبه می‌شود:

$$DES_j = \theta^* - 1. \quad (14)$$

دقت نمایید که به صورتی که پیش این توصیف شد نیاز به ایجاد تمام ترکیبات بنگاه‌های تخصصی در  $S_1$  و  $S_r$  نیست و فقط یک زیرمجموعه از آنها برای تعریف  $P_V$  کافی است که به صورت زیر اثبات می‌شود. چون  $P_1$  با تعداد متناهی از واحدهای کارای  $BCC$ <sup>۱</sup> در  $P_1$  تعیین می‌شود یک واحد ناکارای  $(v_{1\alpha}, z_{1\alpha})$  در  $P_1$  به صورت یک ترکیب محدب واحدهای کارای  $BCC$  با حداقل یک متغیر کمکی غیرصفر در ورودی یا خروجی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$v_{1\alpha} = \sum_{j \in E_1} v_{1j} \lambda_j + s_{\alpha}^- \quad (15)$$

<sup>1</sup> Banker, Charnes and Cooper (BCC)

$$z_{1\alpha} = \sum_{j \in E_1} z_{1j} \lambda_j - s_{\alpha}^+ \quad (16)$$

$$1 = \sum_{j \in E_1} \lambda_j, \lambda_j \geq 0 \quad (\forall j) \quad (17)$$

$$(s_{\alpha}^-, s_{\alpha}^+) \neq (0, 0), s_{\alpha}^- \geq 0, s_{\alpha}^+ \geq 0, \quad (18)$$

که  $E_1$  مجموعه واحدهای کارای  $BCC$  در  $S_1$  است. اگر این واحد ناکارا با  $(v_{1\alpha}, z_{1\alpha})$  در  $P_1$  را با یک واحد  $(v_{2\beta}, z_{2\beta})$  در  $P_2$  ترکیب کنیم، یک واحد مجازی به صورت زیر داریم:

$$(v_{1\alpha} + v_{2\beta}, z_{1\alpha} + z_{2\beta}) = \sum_{j \in E_1} (v_{1j} + v_{2j}, z_{1j} + z_{2j}) \lambda_j + (s_{\alpha}^-, -s_{\alpha}^+, 0).$$

چون  $(v_{1j} + v_{2j}, z_{1j} + z_{2j})$  ترکیبی از  $(v_{1j}, z_{1j})$  با  $(v_{2j}, z_{2j})$  است در نتیجه متعلق به  $P_V$  است و از این رو ترکیب محدب‌باش یعنی اولین عبارت در سمت راست نیز در  $P_V$  قرار می‌گیرد. با فرض  $(s_{\alpha}^-, s_{\alpha}^+) \neq (0, 0)$ ،  $(v_{1\alpha} + v_{2\beta}, z_{1\alpha} + z_{2\beta})$  واحد مجازی دارای کمکی غیرصفر در واحد ترکیبی محدب دارد و بنابراین نسبت به  $P_V$  کارا نیست. بدین گونه نیاز به ترکیب یک واحد ناکارا در  $S_1$  با واحدهای در  $S_2$  نیست.

به طور مشابه واحدهای ناکارا در  $S_2$  به منظور تشکیل  $P_V$  مشارکت ندارند.

تذکر. مجموعه امکان تولید مجازی  $P_V$  همان‌طور که در (۸) تعریف شد می‌تواند از ترکیب فقط واحدهای

کارای  $BCC$  در  $S_1$  و  $S_2$  تشکیل شود. [۱۴، ۲۵]

این می‌تواند به طور قابل ملاحظه‌ای تعداد بنگاه‌های مجازی که باید تولید شوند و در نتیجه میزان محاسبات به منظور تصمیم‌گیری در مورد حضور صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت را کاهش دهد. امکان دارد که مرزهای کارای بنگاه‌های متنوع مجازی تولیدشده به دلیل نقاط دورافتاده در بنگاه‌های تخصصی به شدت نوسان کنند. بنابراین تصمیم روی صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت موضعی ناپایدار است. گروسکوف و یاساورنگ [۵] دیدگاهی در پاسخ به این انتقاد ارائه دادند. خوانندگان برای مطالعه بیشتر می‌توانند به [۱۴، ۵] مراجعه نمایند.

روش فوق را می‌توان به منظور بررسی سودآوری ادغام نیز به کار برد. فرض کنید می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا بنگاه تخصصی محصول ۱  $(v_{1k}, z_{1k})$  را با بنگاه تخصصی محصول ۲  $(v_{2h}, z_{2h})$  ادغام نماییم یا خیر.

به منظور یافتن مقادیر کارای هزینه  $(v_{1k}^*, z_{1k}^*) \in P_1$  و  $(v_{2h}^*, z_{2h}^*) \in P_2$ ، ابتدا ناکارایی هزینه را از دو بنگاه به ازای این مساله تک ورودی (هزینه) و تک خروجی با به کارگیری مدل  $BCC$  ماهیت ورودی حذف می‌نماییم. فرض کنید  $C(z_1, 0)$  هزینه کمینه برای تولید  $z_{1k}$  در  $P_1$  باشد.

سپس واحدی مجازی شامل یک ورودی (هزینه)  $(v = v_{1k}^* + v_{2h}^*)$  و دو خروجی  $(z_1 = z_{1k}, z_2 = z_{2h})$  را تشکیل می‌دهیم. صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت این بنگاه مجازی در مجموعه  $P_{1,2}$  با حل مدل هزینه زیر بررسی می‌شود:

$$\begin{aligned}
 C(z_1, z_r) &= \min_{\theta, \lambda} v\theta \\
 \text{s.t.} \quad & v\theta = c_1\lambda_1 + c_r\lambda_r + \dots + c_n\lambda_n, \\
 & z_1 \leq y_{11}\lambda_1 + y_{1r}\lambda_r + \dots + y_{1n}\lambda_n, \\
 & z_r \leq y_{r1}\lambda_1 + y_{rr}\lambda_r + \dots + y_{rn}\lambda_n, \\
 & 1 = \lambda_1 + \lambda_r + \dots + \lambda_n, \\
 & \lambda \geq 0.
 \end{aligned} \tag{19}$$

در حالت نشدنی، قرار می‌دهیم:  $C(z_1, 0) + C(0, z_r) = C(z_1, z_r)$ .

با استفاده از  $C(z_1, z_r)$ ،  $C(z_1, 0)$  و  $C(0, z_r)$ ، مطلوبیت ادغام با شرایط زیر بررسی می‌شود:

$$C(z_1, z_r) > C(z_1, 0) + C(0, z_r) \quad \text{ادغام نامطلوب است} \tag{20}$$

$$C(z_1, z_r) = C(z_1, 0) + C(0, z_r) \quad \text{بدون گرایش (بی‌تفاوت)} \tag{21}$$

$$C(z_1, z_r) < C(z_1, 0) + C(0, z_r) \quad \text{ادغام مطلوب است} \tag{22}$$

در هر حالت DES با استفاده از (۲) محاسبه می‌شود.

سنگوپتا و شاو [۱۳] روش محاسباتی به منظور تخمین صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت را به صورت زیر تشریح کردند. با در نظر گرفتن بردار قیمت ورودی واحد  $w_o \in R^m$  برای ورودی  $x_o$  از بنگاه متنوع  $O$ ، کارایی هزینه  $(CE_o)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$CE_o = w_o x_o^* / w_o x_o = \sum_{i=1}^m w_{io} x_i^* / \sum_{i=1}^m w_{io} x_i, \tag{23}$$

که  $x_o^*$  جواب بهینه‌ای از مساله برنامه‌ریزی خطی زیر است:

$$\begin{aligned}
 C(y_o, w_o) &= \min \sum_{i=1}^m w_{io} x_i \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_i \quad \forall i, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad \forall r, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, \forall j.
 \end{aligned} \tag{24}$$

اکنون نیاز به مقایسه هزینه کمینه این  $n$  بنگاه متنوع با خروجی‌های مشاهده‌شده با مرزی شامل بنگاه‌های جمعی با برآورد شرط  $DES = 0$  بر دامنه تغییرات مناسب خروجی‌ها است. این بنگاه‌های جمعی فرضی هستند که توسط بنگاه‌های تخصصی ایجاد شده‌اند. فرض کنید  $n_1$  بنگاه با تولید تنها خروجی  $y_1$  و  $n_r$  بنگاه با تولید تنها خروجی  $y_r$  وجود دارد. تمام جایگشت‌های ممکن خروجی‌ها و هزینه‌های این دو مجموعه از بنگاه‌های تخصصی دو به دو برای تشکیل مجموعه‌ای از بنگاه‌های جمعی فرضی ترکیب می‌شوند. فرض کنید تعداد بنگاه‌های جمعی  $k$  باشد که خروجی و هزینه این بنگاه‌ها با بالانویس «+» متناظر می‌شود. سنگوپتا و شاو [۱۳] روش ایونز و هکمن<sup>۱</sup> [۲۶] را دنبال کردند برای تعیین ناحیه قابل قبولی که بایستی بنگاه‌های جمعی فرضی بنگاه‌های متنوع را پوشش دهند. به عبارت دیگر هر بنگاه متنوع باید در و پنجره تولید کند نه بیشتر از تولید بیشینه و نه

<sup>1</sup> Evans and Heckman

کمتر از تولید کمینه در و پنجره‌های بنگاه‌های فرضی. بنابراین به منظور محاسبه صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت برای بنگاه متنوع  $O$  مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} C^+(y_o, w_o) &= \min \sum_{i=1}^m w_{io} x_i \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^+ &\leq x_i \quad \forall i, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^+ &\geq y_{ro} \quad \forall r, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1, \lambda_j \geq 0, \forall j. \end{aligned} \quad (25)$$

$C^+(y_o, w_o)$  هزینه کمینه تولید بردار خروجی  $y_o$  در مجموعه تکنولوژی جمعی را نشان می‌دهد که  $w_o$  بردار قیمت ورودی بنگاه  $O$  است. درجه صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$DES_o = \frac{C^+(y_o, w_o)}{C(y_o, w_o)} - 1. \quad (26)$$

به دلیل برخی از مشکلات مدل کارایی هزینه (۲۴) که سبب انحراف نتایج DES می‌شود، سنگوپتا و شاو [۱۴] روش زیر را معرفی کردند. مدل (۲۷) از یک بنگاه متنوع با کمینه‌سازی هزینه  $O$  بابه کارگیری یک ساختار تکنولوژی با دربرگیری هزینه کل  $c_o (= \sum_{i=1}^m w_{io} x_{io})$  به صورت ورودی و بردار خروجی  $y_o = (y_{1o}, y_{2o}, \dots, y_{so})$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j c_j &\leq \theta c_o \quad \forall i, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} &\geq y_{ro} \quad \forall r, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1, \lambda_j \geq 0, \forall j. \end{aligned} \quad (27)$$

مقدار تابع هدف بهینه مدل (۲۷) با  $\theta^*$  نشان داده می‌شود. هزینه کمینه بنگاه متنوع  $O$  برای تولید بردار خروجی  $y_o$  را با  $c_o^* (= \theta^* c_o)$  نشان می‌دهیم. به طور مشابه برای محاسبه DES برای بنگاه  $O$ ، مساله برنامه‌ریزی خطی زیر حل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta^+ \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^k \lambda_j c_j^+ &\leq \theta^+ c_o^* \quad \forall i, \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j y_{rj}^+ &\geq y_{ro} \quad \forall r, \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j &= 1, \lambda_j \geq 0, \forall j. \end{aligned} \quad (28)$$

درجه صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت ( $DES_o$ ) به صورت  $\theta^{+*}$  منهای یک تعریف می‌شود یعنی

$$DES_o = \theta^{+*} - 1. \quad (29)$$

به دلیل عدم وجود قیمت ورودی و ارایه دشوار داده‌های هزینه برای یافتن مرز هزینه و عدم وجود داده‌های بنگاه‌های تخصصی که سبب می‌شود نتوان مرز هزینه جمعی را با داده‌های بنگاه‌های تخصصی ایجاد کرد، مجموعه بنگاه‌های متنوع به دو زیرمجموعه تقسیم می‌شوند. یکی مجموعه‌ای است که شامل بنگاه‌هایی است که بیشترین اولین خروجی و کمترین دومین خروجی را تولید می‌کنند و دیگری مجموعه‌ای است که شامل بنگاه‌هایی است که بیشترین دومین خروجی و کمترین اولین خروجی را تولید می‌کنند. فرض کنید اولین زیرمجموعه  $N_1 = \{1, 2, \dots, k\}$  و دومین زیرمجموعه  $N_2 = \{k+1, k+2, \dots, n\}$  باشد که  $N = N_1 + N_2 = \{1, 2, \dots, k, k+1, \dots, n\}$ . به منظور ارزیابی صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت ابتدا دو مدل تحلیل پوششی داده‌های ماهیت خروجی زیر محاسبه می‌شوند. که در واقع کارایی‌های فنی خروجی بنگاه‌های متعلق به زیرمجموعه‌های  $N_1$  و  $N_2$  می‌باشند.

$$\begin{aligned} E_{1o} &= \text{Min} \left( \frac{1}{\theta_o} \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in N_1} \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} \quad \forall i, \\ & \sum_{j \in N_1} \lambda_j y_{rj} \geq \left( \frac{1}{\theta_o} \right) y_{ro} \quad \forall r, \\ & \sum_{j \in N_1} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, \forall j. \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} E_{2o} &= \text{Min} \left( \frac{1}{\theta_o} \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in N_2} \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} \quad \forall i, \\ & \sum_{j \in N_2} \lambda_j y_{rj} \geq \left( \frac{1}{\theta_o} \right) y_{ro} \quad \forall r, \\ & \sum_{j \in N_2} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, \forall j. \end{aligned} \quad (31)$$

$E_{1o}$  و  $E_{2o}$  نشان‌دهنده خروجی بیشینه قابل دستیابی با به کارگیری این دو مجموعه از بنگاه‌ها زمانی است که جدا سنجیده می‌شوند. حال این دو مرز تخصصی نیاز به مقایسه با یک مرز بزرگ شامل تمام بنگاه‌های متعلق به هر دو زیرمجموعه  $N_1$  و  $N_2$  دارند که به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} E_{12o} &= \text{Min} \left( \frac{1}{\theta_o} \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in N} \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} \quad \forall i, \\ & \sum_{j \in N} \lambda_j y_{rj} \geq \left( \frac{1}{\theta_o} \right) y_{ro} \quad \forall r, \\ & \sum_{j \in N} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, \forall j. \end{aligned} \quad (32)$$

حضور یا غیبت صرفه جویی های ناشی از وسعت هر بنگاه  $O$  به این وابسته است که آیا بهبود بیشتری در کارایی امکان پذیر است که با مقایسه مرز تخصصی و بزرگ به آسانی صورت می گیرد.  $(E_{10} / E_{120}) > 1$  حضور صرفه جویی های ناشی از وسعت را برای بنگاه  $O$  نشان می دهد در حالی که  $(E_{10} / E_{120}) = 1$  بیان کننده غیبت آن است.

شاو و تن [۱۲] نیز دو مدل هزینه تحلیل پوششی داده های رقیب را به منظور ارزیابی مرز هزینه با افشای رفتار صرفه جویی های ناشی از وسعت بنگاه های چند محصولی توصیف کردند. روش اول آنها مشابه مدل های (۲۳) - (۲۶) می باشد و روش دوم آنها مشابه (۲۷) - (۲۹) می باشد تنها به جای مدل (۲۸) مدل زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \theta^+ \\ & \text{s.t. } \sum_{j=1, j \neq 0}^k \lambda_j c_j^+ \leq \theta^+ c_o^* \quad \forall i, \\ & \sum_{j=1, j \neq 0}^k \lambda_j y_{rj}^+ \geq y_{ro} \quad \forall r, \\ & \sum_{j=1, j \neq 0}^k \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, \forall j. \end{aligned} \quad (33)$$

آنها استدلال آورند که در حضور نقص بازار مدل هزینه دوم به طور نسبی منعطف تر و به طور تجربی با خواستار بیشتر در آشکارسازی رفتارهای کارایی هزینه و صرفه جویی های ناشی از وسعت دقیق بنگاه های متنوع است. قابلیت های انعطاف نسبی بر حسب عدم نیازمندی صریح فرض های غیرواقع است که ورودی ها همگن هستند، قیمت های ورودی همواره موجود هستند و با اطمینان اندازه گیری می شوند و بازار کاملاً رقابتی است که در روش یک موجود می باشند. اما زمانی که ورودی ها در سراسر بنگاه ها همگن هستند و قیمت های ورودی برونزا هستند روش یک موفق تر است حتی با محدودیتی که شاخص کارایی هزینه اش تنها کارایی های فنی و تخصیصی را اما نه کارایی های قیمت را منعکس می کند.

به عنوان توضیح بیشتر مدل کارایی هزینه به کار رفته در روش دوم هیچ یک از فرض های برونزایی قیمت، تحذب در تکنولوژی مبتنی بر شاخص و دسترسی داده های قیمت بازار واحد را فرض نمی کند که در روش یک موجود است. زمانی که بنگاه ها در بازار رقابتی با قیمت های واحد مشترک برای خرید ورودی هایشان مواجه می شوند عبارات (۲۶) و (۲۹) با هم مساوی هستند و هرگاه به دلیل ساختار بازار ورودی ناقص این فرض نقص شود این دو روش منتهی به مجموعه های متفاوت از تخمین های صرفه جویی های ناشی از وسعت می شود.

زینالزاده اهرنجانی و همکاران [۱۵] با استفاده از تحلیل پوششی داده ها صرفه جویی های ناشی از وسعت را در سیستم های تولید دمرحله ای مورد بررسی قرار دادند. در این قسمت روش مطرح شده توسط آنها تشریح می شود. به ازای واحدهای تولید دمرحله ای به منظور ارزیابی صرفه جویی های ناشی از وسعت واحدهای ادغام شده به طور مجازی، آنها یک مجموعه از بنگاه های متنوع مجازی ( $M$ ) با ترکیب  $p$  بنگاه تخصصی از گروه  $S_1$  با  $q$  بنگاه تخصصی از گروه  $S_p$  ایجاد کردند. در هر دو گروه ساختار به صورت دمرحله ای است که ورودی های آنها یکسان (هر دو از نوع هزینه می باشد) است در حالی که خروجی های نهایی و محصولات میانی

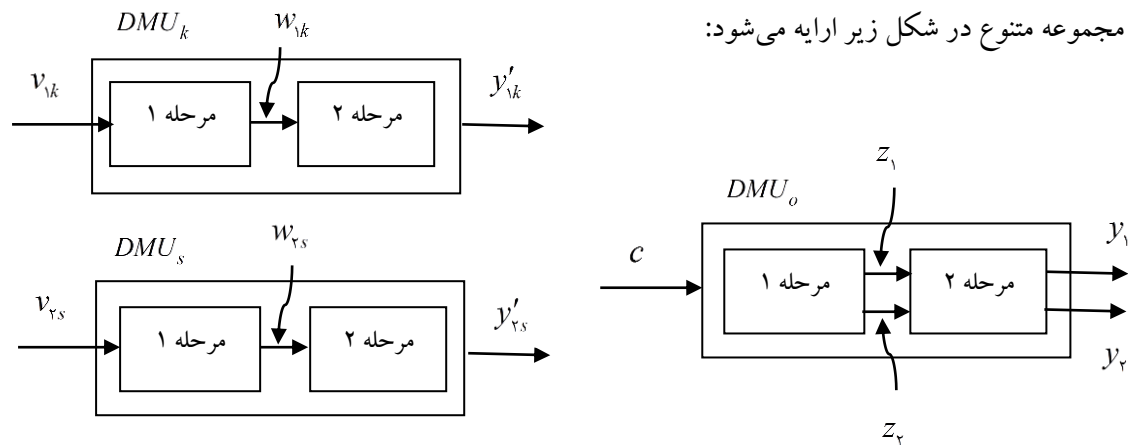
آنها متفاوت هستند. تعریف برای ترکیب هر دو بنگاه برای ایجاد بنگاه‌های ادغام‌شده مجازی به صورت  $v_{ks} = v_k^* + v_s^*$  است. اما این بنگاه ادغام‌شده شامل دو خروجی نهایی  $y'_{ks} = \begin{pmatrix} y'_k \\ y'_s \end{pmatrix}$  و دو محصول میانی  $w_{ks} = \begin{pmatrix} w_k \\ w_s \end{pmatrix}$  است. واحدهای مجازی از یک ورودی  $v = v_{1k}^* + v_{rs}^*$  و دو خروجی  $\begin{pmatrix} y'_1 = y_{1k} \\ y'_r = y_{rs} \end{pmatrix}$  تشکیل شده‌اند که  $v_{1k}^*$  و  $v_{rs}^*$  هزینه بهینه گروه ۱ و ۲ است. بنابراین آنها  $M$  و مجموعه امکان تولید آن را به صورت زیر تعریف کردند:

$$M = \{(v_j, y'_{1j}, y'_{rj}) \mid j = 1, \dots, pq\}$$

$$P_M = \{(v_j, y'_1, y'_r) \mid v \geq \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j, y' \leq \sum_{j=1}^n y_j \lambda_j, \lambda_j \geq 0, \forall j\}$$

که  $v_j = v_{1j}^* + v_{rj}^*$  می‌باشد و  $y$  نشان‌دهنده خروجی‌ها (محصول ۱ و ۲) است. واحدها در گروه‌ها و

مجموعه متنوع در شکل زیر ارائه می‌شود:



شکل ۴. واحدهای گروه ۱، ۲ و واحدهای متنوع

زینال‌زاده اهرنجانی و همکاران [۱۵] به منظور بررسی صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت سیستم‌های دومرحله‌ای مجازی در مجموعه امکان تولید بنگاه‌های متنوع تحت فرض بازده به مقیاس ثابت مدل زیر را ارائه دادند:

$$\begin{aligned} \text{Min } & \theta \\ \text{s.t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j c_j \leq \theta v_k, \\ & \sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} \geq y'_{rk} \quad r = 1, 2, \\ & 0 \leq \sum_{j=1}^n (\lambda_j - \mu_j) z_{dj}, d = 1, 2, \lambda_j, \mu_j \geq 0, \forall j. \end{aligned} \quad (34)$$

که  $\lambda_j$  و  $\mu_j$  متغیرهای وزنی به ازای هر مرحله می‌باشند و  $v_k$  و  $y'_k$  به ترتیب ورودی‌ها و خروجی‌های سیستم دو مرحله‌ای مجازی ادغام‌شده را نشان می‌دهند. سمت راست هر محدودیت در مدل (۳۴) ورودی‌ها، خروجی‌ها و محصولات میانی بنگاه‌های متنوع را نشان می‌دهد. به علاوه  $v_{1k}^*$  و  $v_{rs}^*$  هزینه‌های بهینه حاصل از مدل

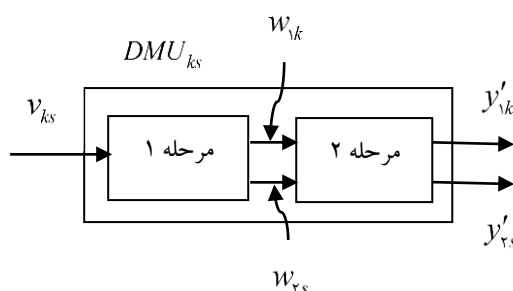


(۳۵) برای هر واحد (واحد تحت ارزیابی با  $\theta$  نشان داده شده است) در گروه‌های  $S_1$  و  $S_r$  هستند (یعنی  $DMU_k \in S_1$ ؛  $v_{1k}^* = \theta_k^* x_k$  و  $DMU_s \in S_r$ ؛  $v_{rs}^* = \theta_s^* x_s$ ).  $y'_r$  و  $y'_1$  خروجی‌های  $S_r$  و  $S_1$  هستند.

$$\begin{aligned} \text{Min } \theta \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{io}, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj} \geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, S, \\ \sum_{j=1}^n (\lambda_j - \mu_j) z_{dj} \geq 0, \quad d = 1, \dots, D, \\ \lambda_j, \mu_j \geq 0, \quad \forall j. \end{aligned} \quad (35)$$

هر بنگاه ادغام‌شده در مدل (۳۴) ترکیبی از دو بنگاه تخصصی در دو گروه متنوع است که محصولات میانی و خروجی نهایی بنگاه‌های تخصصی متفاوت اما ورودی‌های آنها مشابه است. در نتیجه بنگاه ادغام‌شده ایجادشده شامل دو خروجی، دو محصول میانی و یک ورودی مشابه با بنگاه متنوع شکل ۵ می‌باشد. به علاوه  $(c, z, y)$  نشان‌دهنده ورودی، محصول میانی و خروجی‌های بنگاه‌های متنوع می‌باشد. توجه نمایید  $(v_{ks}, w_{ks}, y'_{ks})$  ورودی، محصول میانی و خروجی  $DMU_{ks}$  ادغام‌شده مجازی می‌باشد که  $v_{ks} = v_k^* + v_s^*$  و  $w_{ks} = \begin{pmatrix} w_{1k} \\ w_{rk} \end{pmatrix}$

$$y'_{ks} = \begin{pmatrix} y'_{1k} \\ y'_{rs} \end{pmatrix} \text{ می‌باشد.}$$



شکل ۵.  $DMU_{ks}$  متنوع

فرض کنید  $\theta$  بهینه در مدل (۳۴) با  $\theta^*$  نشان داده شود. هزینه بهینه تولید دو محصول توسط بنگاه ادغام شده مجازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} c(y_1, y_r) &= \theta^* (v_{1k}^* + v_{rs}^*) \\ \text{چون } v_{1k}^* &= c(y_1, 0) \text{ و } v_{rs}^* = c(0, y_r) \text{ بنابراین} \\ c(y_1, y_r) &= \theta^* (c(y_1, 0) + c(0, y_r)) \end{aligned} \quad (36)$$

با در نظر گرفتن روابط اخیر، مطلوبیت ادغام به صورت زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد:

$$\theta^* > 1: \text{ ادغام نامطلوب است،}$$

$$\theta^* = 1: \text{ بدون گرایش (بی تفاوت)،}$$

$$\theta^* < 1: \text{ ادغام مطلوب است.}$$

همچنین درجه صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت با به کارگیری (۲) و (۳۶) به صورت ذیل است:

$$DES = \frac{1}{\theta^*} - 1$$

به منظور مطالعه وجود صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت در سیستم‌های دومارحله‌ای که چندین ورودی را برای تولید چندین خروجی استفاده می‌کنند با فرض دستیابی به قیمت‌های ورودی، کافی است که چنین سیستمی به حالت یک ورودی تبدیل شود و  $\bar{c}_j = c_1x_{1j} + c_2x_{2j} + \dots + c_ix_{ij}$  را استفاده نماییم که  $C = (c_1, c_2, \dots, c_i)$  بردار قیمت‌های ورودی می‌باشد.

برای ارزیابی صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت با استفاده از DEA، اولین گام این است که شاخص‌های عملکرد را برای هر واحد تعریف کنیم. در واقع با توجه به واحدها و ساختار واحدها مدل‌های مربوطه را می‌توان استفاده نمود. با به کارگیری تحلیل پوششی داده‌ها برای تخمین صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت، واحدها می‌توانند تصمیمات آگاهانه‌ای در مورد استراتژی‌های تولید خود بگیرند و فرصت‌هایی را برای صرفه‌جویی در هزینه‌ها شناسایی کنند. این تحلیل می‌تواند به هدایت تخصیص منابع، تنوع محصول و برنامه‌ریزی استراتژیک کمک کند.

#### ۴ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

با توجه به اهمیت بررسی صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت در سیستم‌های چند محصولی و سازمان‌های چندبخشی در این بررسی پس از معرفی مفهوم صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت، چندین روش غیرپارامتری موجود در ادبیات مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در واقع برخی از مدل‌های مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها به منظور رسیدگی حضور صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت یا عدم حضور آن بیان شدند. بررسی نشان می‌دهد توجه به ساختار و شاخص‌ها در تخمین صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت مهم و اساسی می‌باشد. به علاوه مساله صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت در سیستم‌های دومارحله‌ای نیز مورد مطالعه قرار گرفته است.

به نظر می‌رسد ارایه مدل‌های مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌های موجود به منظور بررسی صرفه‌جویی‌های ناشی از مقیاس موضوع جالبی برای تحقیقات آتی باشد. به علاوه تحقیق در مورد صرفه‌جویی‌های ناشی از وسعت، مقیاس و استفاده از ظرفیت در حضور داده‌های نادقیق از جمله موضوعاتی هستند که می‌توانند مورد توجه قرار گیرند.

#### منابع

- [1]. Panzar, J.C. and Willig, R.D., (1981), Economies of Scope. American Economic Review, 71 (2), 268-72.
- [2]. Baumol, W. J. Panzar, J. C. and Willig, R. D., (1982). Contestable Markets and the Theory of Industry Structure. Harcourt Brace Jovanovich, Inc., New York.
- [3]. Färe, R., (1988). Efficiency Gains from Addition of Technologies: A Nonparametric Approach, Physica-Verlag HD, Heidelberg, 171-176.
- [4]. Fare, R., (1986). Addition and efficiency. The Quarterly Journal of Economics, 101 (4), 861-866.
- [5]. Grosskopf, S. and Yaisawarng, S., (1990). Economies of scope in the provision of local public services. National Tax Journal, 43, 61-74.
- [6]. Prior, D., (1996). Technical efficiency and scope economies in hospitals. Applied economics, 28 (10), 1295-1301.

- [7]. Kwon, O.S. and Yun, W.-C., (2003). Measuring economies of scope for cogeneration systems in Korea: a nonparametric approach. *Energy Economics*, 25 (4), 331-338.
- [8]. Morita, H., (2003). Analysis of economies of scope by data envelopment analysis: comparison of efficient frontiers. *International Transactions in Operational Research*, 10 (4), 393-402.
- [9]. Hajargasht, G. Coelli, T. and Rao, D. S. P., (2008). A dual measure of economies of scope. *Economics Letters*, 100 (2), 185-188.
- [10]. Färe, R. and Karagiannis, G., (2018). Inferring scope economies from the input distance function. *Economics Letters*, 172, 40-42.
- [11]. Chavas, J.-P. Barham, B. and Foltz, J. Kim, K., (2012). Analysis and decomposition of scope economies: R&D at US research universities. *Applied Economics*, 44 (11), 1387-1404.
- [12]. Sahoo, B.K. and Tone, K., (2013). Non-parametric measurement of economies of scale and scope in non-competitive environment with price uncertainty. *Omega*, 41 (1), 97-111.
- [13]. Sengupta, J. and Sahoo, B., (2006). Scale, Scope, and Capacity Utilization in the Indian Banking Industry. In *Efficiency Models in Data Envelopment Analysis*, 143-171, Springer.
- [14]. Cooper, W.W. Seiford, L. M. and Tone, K., (2007). *Economies of Scope and Capacity Utilization. Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, 381-404.
- [15]. Zeinalzadeh Ahranjani, L., Matin, R. K. and Saen, R. F., (2018). Economies of scope in two-stage production systems: A data envelopment analysis approach. *RAIRO-Oper. Res.* 52 (2), 335-349.
- [16]. Zaker Harofte, E., and Hosseinzadeh Saljooghi, F. (2021). Cost-effectiveness and economies of scope on network processes with shared resources and resources recovered from undesirable output. *Journal of Modeling in Engineering* 19 (67), 135-150.
- [17]. Zaker Harofte, E., and Hosseinzadeh Saljooghi, F., (2023). Investigating the economies of scope and cost effectiveness in manufacturing companies with interval data. *International Journal of Computational Intelligence Systems* 16 (1), 166.
- [18]. Panzar, J.C. and Willig, R.D., (1975). Economies of scale and economies of scope in multi-output production. *Bell Laboratories economic discussion paper* 33.
- [19]. Teece, D.J., (1980). Economies of scope and the scope of the enterprise. *Journal of Economic Behavior & Organization* 1 (3), 223-247.
- [20]. Teece, D.J., (1982). Towards an economic theory of the multiproduct firm. *Journal of Economic Behavior & Organization* 3 (1), 39-63.
- [21]. Teece, D.J. Rumelt, R., Dosi, G. and Winter, S., (1994). Understanding corporate coherence: Theory and evidence. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 23 (1), 1-30.
- [22]. Kasuya, M., (1986). Economies of scope: Theory and application to banking. *BOJ Monetary and Economic Studies*, 4, 59-104.
- [23]. Grosskopf, S. Hayes, K. and Yaisawarng, S., (1992). Measuring economies of diversification: a frontier approach. *Journal of business & economic statistics*, 10 (4), 453-459.
- [24]. Parman, Bryon J., Allen M. Featherstone, and Brian K. Coffey, (2017). Estimating product-specific and multiproduct economies of scale with data envelopment analysis. *Agricultural Economics*, 48 (4), 523-533.
- [25]. Tone, K., (2005). A price-based capacity utilization analysis using DEA. The 2005 fall national conference of operational research society of Japan.
- [26]. Evans, D.S. and Heckman, J.J., (1984). A Test for Subadditivity of the Cost Function with an Application to the Bell System. *The American Economic Review*, 74 (4), 615-623.