مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال شانزدهم، شماره اول (پیاپی ۶۰)، بهار ۹۸، ص ص ۲۸-۱۱
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

انتخاب زیرگراف کدگذاری شده بهینه تحت محدودیت پایداری

سلمان خدایی‌فر[1*]، محمدعلی رعایت‌پناه[2]، احمد فولادی[3]
۱- استادیار، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، دانشکده ریاضی، زنجان، ایران
۲- استادیار، دانشگاه خوارزمی تهران، دانشکده ریاضی، تهران، ایران
۳- کارشناسی ارشد، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، دانشکده ریاضی، زنجان، ایران

رسید مقاله: ۲۵ مرداد ۱۳۹۶
پذیرش مقاله: ۲۳ دی ۱۳۹۷

چکیده
امروزه با توجه به نیاز روزافزون کاربران شبکه‌های مخابراتی برای افزایش پهنای باند، کاهش تاخیر و هزینه انتقال، لزوم استفاده بهینه از امکانات شبکه ضروری است. کدگذاری شبکه روش جدیدی در شبکه‌های مخابراتی است که در آن برخی از گره‌های میانی علاوه بر انتقال و تکثیر اطلاعات قادر به انجام عملیات جبری بر روی داده‌های دریافتی و ترکیب آن‌ها می‌باشند. همچنین اهمیت بسیار بالای ظرفیت فیزیکی در شبکه‌های مخابراتی، مثلا بالا بردن توانایی این شبکه‌ها در مقابل شکست مسیر توسط بریدگی کابل‌ها یا قطعی‌های الکتریکی در مراکز تعمیر باعث شده است که طراحان به‌دنبال مدل‌های پایداری باشند تا بتوانند قسمت‌های آسیب‌دیده شبکه را بازسازی کنند. پایداری به‌عنوان کسری از تقاضا درنظر گرفته می‌شود که می‌تواند پس از یک سناریوی شکست یا مجموعه‌ای از سناریوی شکست برآورده شود. در این مقاله، سعی می‌شود زیرگرافی با حداقل هزینه برای ارسال اطلاعات در شبکه کدگذاری با یک ارتباط چندپخشی تحت محدودیت پایداری انتخاب گردد. بعد از مدل‌بندی مساله، مدل پیشنهادی خود را با استفاده از الگوریتم توزیع شده آزادسازی لاگرانژ حل می‌کنیم. نهایتا، با ارایه نتایج عددی، چگونگی بهبود عملکرد شبکه را با استفاده از مدل پیشنهادی خود نسبت به مدل پایداری فاقد کدگذاری نشان خواهیم داد.

کلمات کلیدی: شبکه کدگذاری شده، پایداری شبکه، آزادسازی لاگرانژ.

۱ مقدمه
کدگذاری شبکه و مساله پایداری از جمله مسایلی هستند که در شبکه‌های مخابراتی دارای اهمیت بالایی می‌باشند. خدمات‌رسانی به مشترکین از جمله اهداف مهمی برای شرکت‌های مخابراتی است که برای بالا بردن رضایت کاربران مورد توجه خاصی است. کدگذاری شبکه روش جدیدی در شبکه‌های مخابراتی است که باعث افزایش توانایی و ظرفیت‌های شبکه می‌شود. در کدگذاری، برخی از گره‌ها علاوه بر انتقال اطلاعات، قادر به انجام عملیات جبری بر روی داده‌های دریافتی و ترکیب آن‌ها می‌باشند. امروزه باتوجه به نیازهای روز افزون

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: s.khodayifar@iasbs.ac.ir

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.4.3]

کاربران شبکه‌های مخابراتی در زمینه‌های مختلفی مانند افزایش پهنای باند، کاهش تاخیر و هزینه انتقال اطلاعات باعث شده است تا لزوم استفاده بهینه از امکانات و توانایی‌های شبکه ضروری شود.

در سال ۲۰۰۰ میلادی اولین مقاله را در این زمینه السویدی و همکاران وی [۱] منتشر کردند که کدگذاری شبکه دستیابی به توان عملیاتی با کم‌ترین نرخ در یک نشست چندپخشی را از طریق اجرای الگوریتم ماکزیمم جریان ممکن می‌سازد. لی و همکارانش در [۲] نشان دادند که این نتایج را می‌توان با اجرا یک الگوریتم کدگذاری خطی به‌دست آورد. علاوه بر این، جگی و همکارانش[۳]، الگوریتمی را در زمان چندجمله‌ای برای کدگذاری خطی طراحی کردند. همچنین جو و همکارنش [۴] از اولین کسانی هستند که روش‌های سودمندی را برای حل شبکه‌های کدگذاری شده با ظرفیت بافر در هر گره مطرح کردند. در سال‌های اخیر نیز افرادی مانند چنگ و همکارانش، مقاله‌ای را در زمینه حداکثر کردن مزیت کدگذاری در شبکه‌های بی‌سیم و چگونگی انجام کدگشایی در شبکه مطرح کرده‌اند[۵]. رعایت‌پناه و همکاران وی زیرگراف چندپخشی بهینه محدود تحت شبکه‌های بسته‌ای کدگذاری شده را مورد بررسی قرار داده‌اند [۶]. همچنین قسوری و رعایت پناه یک روش بهینه‌سازی رباست را برای کدگذاری شبکه چندپخشی تحت هزینه دارای عدم قطعیت روی کمان‌ها ارایه داده‌اند [۷]. اندازه‌گیری بهره‌وری رباست با مجموعه مشترک از وزن‌ها تحت درجه‌های متغیر از محافظه‌کاری و عدم اطمینان داده، اخیرا در [۸] بیان شده است.

پرداختن به مساله کدگذاری شبکه در یک نشست چندپخشی را می‌توان به دو قسمت مجزا:

۱. پیدا کردن زیرگراف برای کدگذاری بهینه روی آن
۲. طراحی کدهای مناسب بر روی زیرگراف بهینه انتخاب شده

تقسیم کرد. در مورد نحوه کدگذاری تحقیقات زیادی انجام شده؛ ولی در مورد انتخاب زیرگراف بهینه توجه کم‌تری صورت گرفته است. در این مقاله توجه خود را برای یافتن زیرگراف بهینه کدگذاری شده در یک نشست چندپخشی بر روی شبکه‌های مخابراتی با موضوع حفظ پایداری شبکه معطوف می‌کنیم.

اهمیت بسیار بالای ظرفیت فیزیکی در شبکه‌های مخابراتی، مانند بالا بردن توانایی این شبکه‌ها در مقابل شکست مسیر توسط بریدگی کابل‌ها یا قطعی‌های الکتریکی در مراکز تعمیر و ... باعث شده است که افراد برنامه‌ریز به‌دنبال طرح‌های پایداری باشند تا بتوانند قسمت‌های آسیب‌دیده شبکه را بازسازی کنند. شکست در شبکه به معنای حذف یک کمان یا یک گره (یک شکست) بوده که باعث می‌شود انتقال اطلاعات با مشکل مواجه شود. در این نوع از شبکه‌ها، پایداری به‌عنوان کسری از تقاضا درنظر گرفته می‌شود که می‌تواند پس از یک سناریوی شکست یا مجموعه‌ای از سناریوهای شکست برآورده شود. دو مفهوم در پایداری وجود دارد.

- اولین مفهوم با عنوان پراکندگی است که شامل شکستن تقاضا و استفاده از دو یا تعداد بیش‌تری از مسیرهای مجزا بین گره مبدا و مقصد، برای تامین تقاضاهای شبکه است که در عین حال، زمانی که شکست در شبکه اتفاق می‌افتد، میزان خاصی از تقاضا حتما باید برآورده شود. به‌عبارتی دیگر، پراکندگی باعث می‌شود تا تقاضاهای شبکه از گره مبدا توسط چند مسیر مجزا به گره‌های مقصد ارسال شوند تا در صورت بروز شکست در شبکه، تنها بخشی از تقاضا از بین برود.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.4.3]

- دومین مفهوم با عنوان ذخیره‌سازی است که ظرفیت‌های کمکی را برای موقعیت‌های شکست به‌کار می‌گیرد.

از این‌رو در این مقاله، به بررسی مساله مسیریابی بهینه در شبکه‌های ظرفیت‌دار با اعمال کدگذاری بر روی زیرگراف بهینه می‌پردازیم؛ بنابراین کمان‌های شبکه را باید به‌گونه‌ای انتخاب کنیم تا با کدگذاری بر روی مسیریابی بهینه برای هر تقاضا، ابتدا مسیریابی در موقعیت‌های شکست پایدار بماند و در عین حال هدف اصلی مساله را بهبود ببخشد.

در سال ۲۰۰۰ ریوس و ماریانو[۹] مساله پایداری را بر روی طراحی شبکه‌های مخابراتی بدون درنظر گرفتن کدگذاری شبکه مطرح کردند. در طی سال‌های بعد، کارهای زیادی در زمینه پایداری شبکه‌های جریان انجام گرفته است که می‌توان از افرادی مانند آدیس و همکارانش [۱۰] که مساله پایداری را در شبکه‌های انرژی هوشمند مورد بررسی قرار داده‌اند و دانشمندان دیگری همچون مارتین رودریگز و همکارانش [۱۱]، بویی و بینه [۱۲] که در زمینه‌های طراحی شبکه‌های پایدار فعالیت داشته‌اند، نام برد. همچنین می‌توان به مسایل طراحی شبکه پایدار تصادفی [۱۳] و همچنین شبکه‌های پایدار نوری قابل ارتجاع [۱۴]، اشاره نمود. گوویا و همکارش در سال ۲۰۱۷ طراحی شبکه پایدار را با محدودیت‌های آسیب‌پذیری مطرح کردند [۱۵].

در این‌جا، مساله کدگذاری [۱۶] را بر روی شبکه‌های مخابراتی پایدار با الهام گرفتن از مقاله [۹] پیاده‌سازی می‌کنیم و بدین گونه با توسعه بخشیدن به مقاله [۹]، عملکرد شبکه پایدار را بهبود می‌بخشیم. همچنین در انتهای این مقاله، روش آزادسازی لاگرانژ را برای حل مدل مساله پایداری با کدگذاری بر روی شبکه، به‌کار می‌بریم.

در این مقاله ابتدا در بخش دوم، به مطالب مقدماتی از جمله مساله پایداری در شبکه‌های مخابراتی و مفهوم کدگذاری اشاره می‌کنیم. مدل پیشنهادی برای انتخاب زیرگراف بهینه برای کدگذاری شبکه تحت محدودیت پایداری در بخش سوم بحث می‌شود. کلیات روش حل آزادسازی لاگرانژ برای حل مساله پیشنهادی در بخش چهارم بیان خواهد شد. دربخش پنجم، نتایج تحقیق و نهایتا در بخش ششم نتیجه‌گیری و تحقیقات آینده بیان خواهند شد.

۲ مطالب مقدماتی

۲-۱ مساله پایداری در شبکه‌های مخابراتی

گراف جهت‌دار $G=(N,A)$ که در آن N نشان‌دهنده مجموعه تمامی گره‌ها و A نیز مجموعه متشکل از تمامی کمان‌های شبکه G می‌باشد ($|A|=m,\ |N|=n$) را در نظر بگیرید. شبکه دارای یک نشست چندپخشی همراه با یک گره مبدا $s\in N$ و مجموعه‌ای از چند گره مقصد $K\subset N$ می‌باشد.

مجموعه H را مجموعه حالت‌های شکست تعریف می‌کنیم. هر حالت $h\in H$ یک سناریوی واحد را مشخص می‌کند. حالت $h=0$، شبکه را در حالت بدون شکست نشان می‌دهد. حالت بدون شکست، حالتی است که همه گره‌ها و کمان‌های شبکه قابل استفاده هستند. حالت‌های شکست به همه حالت‌هایی اطلاق می‌شود که یک یا چند گره و کمان بی‌استفاده هستند. برای هر حالت $h\in H$، گراف عملیاتی $G_h=(N_h,A_h)$ را به‌کار

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.4.3]

می‌بریم که N_h زیرمجموعه‌ای از مجموعه گره‌های N است که گره شکست در آن نیست و همچنین A_h زیرمجموعه‌ای از مجموعه کمان‌هاست که شامل کمان‌های قابل استفاده و آسیب‌ندیده می‌باشد. به طور کلی برای هر حالت شکست می‌توان گفت:

۱- $N_h = N, A_h = A - \{\text{کمان شکست}\}$

۲- $N_h = N - \{\text{گره شکست}\}, A_h = A - \{\text{همه کمان‌های مجاور با گره شکست}\}$

قابل ذکر است که حالت‌های شکست تک‌عضوی هستند؛ یعنی در هر حالت شکست، یک گره و یا تنها یک کمان شکست می‌خورد. از این رو $\forall h \in H$ مجموعه K_h همه مقصدهای معتبر را نشان می‌دهد. مجموعه K_h شامل همه مقصدهای موجود در K به غیر از زمانی است که آن مقصد آسیب دیده باشد؛ بنابراین در حالت شکست $h = ۰$ که شبکه کاملا سالم و عاری از هرگونه آسیب هست $K_۰ = K$. حال تصمیم‌گیری برای درنظر گرفتن حالت‌های شکست در شبکه، بر عهده طراح شبکه است که باید حالت‌های شکست ممکن را پیش‌بینی کند.

پارامتر σ_k، پارامتر پراکنده‌سازی مرتبط با ماکزیمم کسر از تقاضای R است که مجوز جریان یافتن بین هر گره یا کمان (به‌جز مبدا و مقصد) را داراست و پارامتر ρ_k را به‌عنوان پارامتر ذخیره‌سازی مرتبط با حداقل درصد از کل تقاضای R که باید پس از یک شکست گره‌ای یا کمانی برآورده شود، تعریف می‌کنیم. این پارامترها در توسعه محدودیت‌های مدل به‌کار گرفته می‌شود.

در شبکه‌های تحت محدودیت پایداری لازم است که هر کمان $(i, j) \in A$ بیش‌تر از σ_k واحد از جریان ارسالی به مقصد $k \in K$ را حمل نکند. این عمل باعث پراکندگی جریان بین گره مبدا s و گره مقصد k شده و تقاضای R از طریق چندین مسیر گره مجزا (کمان مجزا)، از گره مبدا s به گره مقصد $k \in K$ می‌رسد (نه لزوما از یک مسیر)؛ بنابراین حداکثر $۱۰۰\sigma_k$ درصد از تقاضای R در صورت شکست احتمالی از بین خواهد رفت. این به این معنی است که $(۱-\sigma_k)۱۰۰$ درصد از تقاضا، بدون هیچ مسیریابی مجدد برآورده می‌شود. ذخیره‌سازی ρ_k نیز ضمانت می‌کند که حداقل $\rho_k R$ واحد جریان پس از یک شکست به مقصد فرستاده شود. ذخیره‌سازی و پراکنده‌سازی می‌توانند به‌طور همزمان یا مجزا برای پایداری استفاده شوند.

در این‌جا جریان عبوری برای مقصد $k \in K$ از کمان $e = (i, j)$ در حالت شکست $h \in H$ را با $w_e^{(k)h}$ نشان می‌دهیم. متغیر $X_e^{(k)}$ را ماکزیمم جریان از مقصد kام بر روی کمان $e \in A$ در کل حالت‌های شکست درنظر می‌گیریم. همچنین c_e را هزینه ارسال یک واحد جریان از طریق کمان e تعریف می‌کنیم. برای هر کمان $e \in A$ یک کران بالا برای ظرفیت کمان تعریف می‌کنیم که با نماد u_e نمایش می‌دهیم؛ بنابراین مدل پایداری مساله انتخاب زیر گراف با کمینه هزینه را به‌صورت:

$$\min \sum_{e \in A} c_e \left(\sum_{k \in K} X_e^{(k)}\right) \qquad (۱)$$

$$s.t.$$

$$\sum_{e \in \delta_i^+} w_e^{(k)h} - \sum_{e \in \delta_i^-} w_e^{(k)h} = \beta_i^{(k)}, \qquad \forall i \in N_h, k \in K_h, h \in H \qquad (۲)$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.4.3]

$$w_e^{(k)\circ} \le \sigma_k R, \qquad \forall e \in A, k \in K \qquad (۳)$$

$$\sum_{e \in \delta_i^+} w_e^{(k)\circ} \le \sigma_k R, \qquad \forall k \in K, i \in N - \{s \cup K\} \qquad (۴)$$

$$w_e^{(k)h} \le X_e^{(k)}, \qquad \forall e \in A_h, k \in K_h, h \in H \qquad (۵)$$

$$\sum_{k \in K} X_e^{(k)} \le u_e, \qquad \forall e \in A \qquad (۶)$$

$$w_e^{(k)h} \ge \circ, \qquad \forall e \in A_h, k \in K_h, h \in H \qquad (۷)$$

$$X_e^{(k)} \ge \circ, \qquad \forall e \in A, k \in K \qquad (۸)$$

مدل‌بندی می‌کنیم که در آن $\beta_i^{(k)}$ به‌صورت:

$$\beta_i^{(k)} = \begin{cases} \rho_k R, & if \quad i = s \\ -\rho_k R, & if \quad i = k \\ \circ, & o.w. \end{cases} \qquad (۹)$$

است. قابل ذکر هست که δ_i^+ مجموعه کمان‌های خروجی از گره i و δ_i^- مجموعه کمان‌های ورودی به گره i را نشان می‌دهند. تابع هدف مدل (۱) هزینه ارسال جریان در صورت بروز کل حالت‌های شکست را به حداقل می‌رساند. دسته قیود (۲) قیود تعادل جریان بوده که در صورت بروز هر یک از حالت‌های شکست، نشان می‌دهند که تفاضل جریان خروجی از جریان ورودی به هر گره برابر با تقاضا در آن گره می‌باشد. این قیود به قیود مسیریابی از گره مبدا s به گره‌های مقصد K_h در شبکه، معروف هستند. دسته قیود (۳) و (۴) را قیود پراکنده‌سازی می‌گوییم، همان‌طور که مشاهده می‌کنید برای جریان عبوری از هر کمان $e \in A$ و همچنین برای جریان خروجی از هر گره $i \in N$ (به‌جز گره‌های مبدا و مقصد)، حداکثر مقدار مجاز $\sigma_k R$ می‌باشد. این محدودیت‌ها مقدار جریان فرستاده شده به یک مقصد خاص که از میان گره‌ها و کمان‌ها عبور می‌کند محدود می‌کند. این امر سبب می‌شود تا جریان مبدا از طریق چند مسیر مجزا عبور کند و به گره‌های مقصد برسد. دسته قیود (۳) تقاضای کل از کالای $k \in K$ را نشان می‌دهد که بین یک گروه از مسیرهای مختلف انجام می‌شود (مسیرهای کمان مجزا). دسته قیود (۴) نیز برای پیدا کردن مسیرهای گره مجزا به‌کار می‌رود. برای مثال، اگر $\circ/۵ \le \sigma_k < ۱$ انتخاب شود آن‌گاه حداقل دو مسیر کمان مجزا خواهیم داشت، در غیر این صورت نامساوی‌های (۳) و (۴) معتبر نخواهند بود. همچنین برای $\sigma_k = \circ/۴$، پیدا کردن سه مسیر یا بیشتر تضمین شده است. به‌طور کلی، انتخاب σ_k باعث می‌شود که جریان برای هر یک از مقاصد $k \in K$ حداقل توسط $\left\lceil \frac{۱}{\sigma_k} \right\rceil$ مسیر مجزا فرستاده شود که $\lceil x \rceil$ کم‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی x است. لازم به ذکر است که هیچ راهی برای به‌دست آوردن پایداری صددرصد در پراکنده‌سازی نیست.

دسته قیود (۵) تضمین می‌کند که $X_e^{(k)}$ برابر با ماکزیمم جریان عبوری بر روی کمان $e \in A$ برای مقصد $k \in K$ در کل حالت‌های شکست می‌باشد. به‌عبارت دیگر مسیریابی مجموعه متغیرهای $w_e^{(k)h}$ یک کران پایین برای متغیرهای $X_e^{(k)}$ می‌دهد. این بدان معنی است که برای هر کمان $e \in A$

$$X_e^{(k)} \ge w_e^{(k)h^*} = \max_{h \in H} \{w_e^{(k)h}\}. \qquad (۱۰)$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.4.3]

درنتیجه می‌توان گفت که h^* بدترین حالت برای جریان ارسالی به مقصد k بر روی کمان $e \in A$ است. در واقع این محدودیت تنها محدودیت پیوندی بین متغیرهای w و X است. نهایتا محدودیت (۶) یک کران بالا برای ماکزیمم جریان کل را نشان می‌دهد.

در بخش بعد، مفهوم کدگذاری روی شبکه جریان‌ها را تشریح می‌کنیم.

۲-۲ مدل کدگذاری شبکه با یک نشست چندپخشی

در این بخش، مساله حداقل نمودن هزینه زیرگراف در کدگذاری شبکه با یک نشست چندپخشی بررسی می‌گردد. فرض کنید گره منبع s می‌خواهد بسته‌ها را با نرخ مثبت و حقیقی R به هر گره گیرنده k متعلق به مجموعه K در شبکه با قابلیت کدگذاری بسته‌ها انتقال دهد.

برای هر کمان $e=(i,j)$، متغیر جریان $x_e^{(k)}$ نشان‌دهنده جریان بر روی کمان e برای گیرنده k و متغیر کدگذاری z_e بیان‌کننده نرخ تزریق بسته‌های کدگذاری شده بر روی کمان e می‌باشد. زیرگراف حاصل از کمان‌هایی که مقدار z_e آن‌ها برای هر $e \in A$ مقدار مثبت است، زیرگراف کدگذاری نامیده می‌شود [۱۶، ۱۷، ۱۸]. فرض شده است که z_e بخشی از مجموعه مقید و محدب Z باشد، تابع هزینه زیرگراف را با $f(z)$ نشان می‌دهیم و به‌منظور سادگی می‌توان آن را محدب فرض کرد. تابع هزینه بازتاب‌دهنده برخی از ویژگی‌های شبکه است و این امکان را ایجاد می‌نماید تا از بین زیرگراف‌های موجود برخی را که قادر به ایجاد اتصالات مطلوب هستند به بقیه ترجیح دهد؛ بنابراین مساله یافتن زیرگراف بهینه در کدگذاری شبکه با یک نشست چندپخشی به‌صورت:

$$\min \ f(z) \tag{۱۱}$$

$$s.t.$$

$$z \in Z, \tag{۱۲}$$

$$z_e \geq x_e^{(k)} \geq 0, \qquad \forall e \in A, k \in K \tag{۱۳}$$

$$\sum_{e \in \delta_i^+} x_e^{(k)} - \sum_{e \in \delta_i^-} x_e^{(k)} = \beta_i^{(k)}, \qquad \forall i \in N, k \in K \tag{۱۴}$$

مدل‌بندی می‌شود [۱۷] که در آن $\beta_i^{(k)}$ به‌صورت:

$$\beta_i^{(k)} = \begin{cases} R, & if \quad i = s \\ -R, & if \quad i = k \\ 0, & o.w \end{cases} \tag{۱۵}$$

بیان می‌گردد. قید اول مدل (۱۲) بیان می‌کند که z بخشی از مجموعه مقید و محدب Z است. دسته قیود (۱۳) به قیود کدگذاری معروف هستند و نشان می‌دهند که جریان فیزیکی یا میزان کد بر روی هر کمان برابر با حداکثر جریان‌های عبوری بر روی آن کمان است و بالاخره دسته قیود (۱۴)، قیود تعادل جریان برای هر گره را بیان می‌کنند.

معمولا برای کاهش پیچیدگی مساله بهینه‌ساز (۱۱) فرض می‌شود تابع هزینه قابل تفکیک است؛ یعنی $f(z) = \sum_{e \in A} f_e(z_e)$ که f_e تابعی محدب یا خطی می‌باشد. فرضی که می‌توان در بسیاری از راه حل‌های علمی

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.4.3]

آن را درنظر گرفت[۱۷]. به هر کمان $e \in A$ عدد c_e نسبت داده می‌شود که معرف هزینه انتقال یک واحد جریان بر روی کمان $e \in A$ است. همچنین فرض می‌شود که نرخ تزریق بسته‌های کدگذاری شده z_e از ظرفیت کمان u_e تجاوز نکند؛

بنابراین مساله بهینه‌سازی (۱۱) به‌صورت:

$$\min \sum_{e \in A} c_e z_e \qquad (۱۶)$$

$$s.t.$$

$$z_e \geq x_e^{(k)} \geq ۰, \qquad \forall e \in A, k \in K \qquad (۱۷)$$

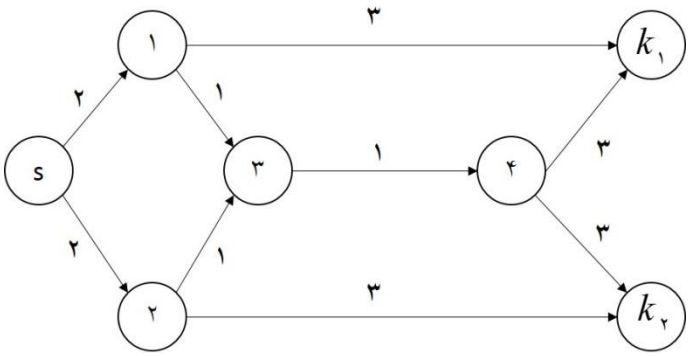
$$\sum_{e \in \delta_i^+} x_e^{(k)} - \sum_{e \in \delta_i^-} x_e^{(k)} = \beta_i^{(k)}, \qquad \forall i \in N, k \in K \qquad (۱۸)$$

$$u_e \geq z_e, \qquad \forall e \in A \qquad (۱۹)$$

بازنویسی می‌شود. مسایل بهینه‌سازی (۱۱) و (۱۶) محدب و خطی هستند و جواب آن‌ها را می‌توان به‌صورت تئوری محاسبه کرد. برای مساله انتخاب زیرگراف، الگوریتم‌های متعددی وجود دارد. یکی از تکنیک‌های آشکار برای یافتن چنین الگوریتم‌هایی این است که با استفاده از ضرایب لاگرانژ، محدودیت‌های (۱۷) حذف شوند و سپس با استفاده از تکنیک زیر گرادیان، به الگوریتم توزیع شده برای حل مساله دست یافت [۱۷].

در ادامه با یک مثال مساله کدگذاری را بیش‌تر توضیح می‌دهیم.

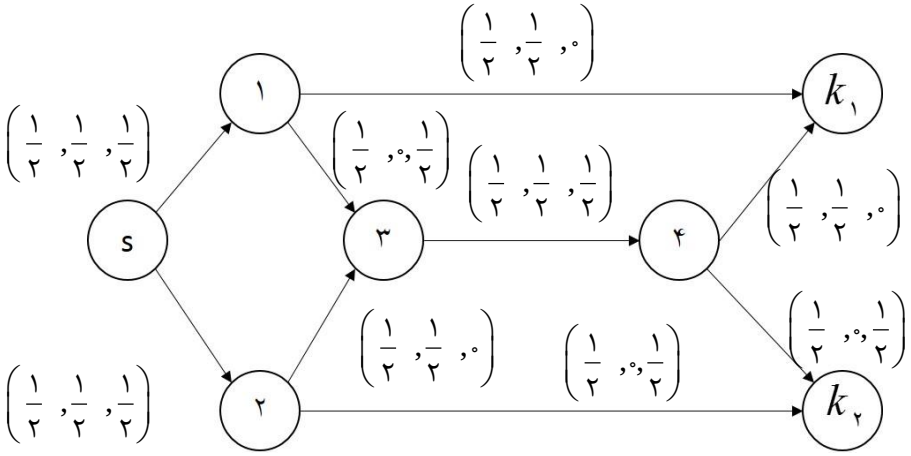
مثال. شبکه پروانه‌ای نشان داده شده در شکل ۱ را درنظر بگیرید که اعداد متناظر با هر کمان معرف هزینه یک واحد انتقال است [۱۷]. فرض کنید که شبکه بدون اتلاف و $Z = [۰,۱]^{|A|}$ است. هدف انتقال چندپخشی بهینه در کدگذاری شبکه با نرخ واحد از گره s به دو گره مقصد $k_۱$ و $k_۲$ است. یک جواب بهینه برای مساله در شکل۲ نشان داده شده است [۱۷]. جریان‌های $x_e^{(۱)}$ و $x_e^{(۲)}$ به ترتیب جریان‌های ارسالی از گره مبدا s به گره‌های مقصد $k_۱$ و $k_۲$ فرض می‌شوند. برای هر کمان $e=(i,j)$، z_e براساس جریان‌های مختلف عبوری از کمان e به‌دست می‌آید، از روی مدل‌سازی می‌توان نتیجه گرفت که $z_e = \max(x_e^{(۱)}, x_e^{(۲)})$ است.



شکل۱. شبکه پروانه‌ای با هزینه بر روی هر کمان

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.4.3]



شکل۲. جواب بهینه به‌دست آمده از شکل پروانه با سه‌تایی مرتب $\left(z_e, x_e^{(1)}, x_e^{(2)}\right)$

بعد از معرفی مدل مساله کدگذاری شبکه حداقل هزینه در حالت ایستا، قصد داریم که در ادامه مدل پیشنهادی خود با مفهوم انتخاب زیرگراف بهینه در شبکه کدگذاری شده تحت محدودیت پایداری را بیان کنیم و سپس راه حل مناسبی، برای حل مدل پیشنهادی خود ارایه دهیم.

۳ انتخاب زیرگراف بهینه برای کدگذاری شبکه جریان تحت محدودیت پایداری

بعد از تعریف پایداری و مدل‌بندی شبکه جریان‌های مخابراتی پایدار، حال می‌خواهیم این نوع شبکه‌ها را به شبکه‌های کدگذاری شده توسیع دهیم و همچنین عملکرد شبکه را نیز بهبود دهیم. برای انجام این کار از مسیریابی برای انتخاب زیرگراف بهینه کدگذاری شده در هر حالت از شکست شبکه استفاده می‌کنیم. به‌عبارتی دیگر، از آن‌جایی که مسایل پایداری در هر حالت شکست باید مقدار تقاضای تعیین شده‌ای را دوباره از ابتدا مسیریابی کنند، در نتیجه مفهوم کدگذاری در این نوع از شبکه‌ها مستلزم این است که در هر حالت شکست $h \in H$ مسیریابی جدیدی را در شبکه آسیب‌دیده برای دست‌یابی به زیرگراف کدگذاری شده انجام دهیم تا در راستای آن، شبکه نیز پایدار باقی بماند؛ بنابراین در ادامه قصد داریم مساله انتخاب زیرگراف بهینه با موضوع کدگذاری بر روی شبکه‌های پایدار را مورد بررسی قرار دهیم و سپس مدل ریاضی آن را بیان کنیم.

متغیر z_e^h را نرخ تزریق بسته‌های کدگذاری شده بر روی کمان $e \in A$ در حالت شکست $h \in H$ گوییم. همچنین c_e هزینه ارسال یک واحد از نرخ بسته‌های کدگذاری شده را بر روی کمان $e \in A$ مشخص می‌کند. کران بالا برای کل پهنای باند موجود بر روی هر کمان $e \in A$ را با نماد u_e نشان می‌دهیم. باتوجه به این‌که قصد داریم تا در هر حالت شکست به انتخاب زیرگراف کدگذاری شده بپردازیم؛ بنابراین در مدل (۱)، قید (۶) را به‌صورت:

$$\sum_{h \in H} z_e^h \le u_e, \qquad \forall e \in A \qquad (۲۰)$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.4.3]

تغییر می‌دهیم که به‌عنوان قیود کدگذاری شبکه شناخته می‌شود. به‌عبارت دیگر مسیریابی مجموعه متغیرهای $w_e^{(k)h}$ در شکست $h \in H$، یک کران پایین برای متغیرهای z_e^h هستند. این بدان معنی است که در حالت شکست h و برای هر کمان e نامعادله

$$z_e^h \geq w_e^{(k^*)h} = \max_{\forall k \in K}\{w_e^{(k)h}\} \qquad (۲۱)$$

برقرار است. در این‌جا قصد داریم هزینه نرخ کدگذاری شبکه را در بدترین حالت شکست محاسبه کنیم و سپس با استفاده از تابع مینیمم‌سازی، هزینه نرخ کدگذاری را در کل حالت‌های شکست به پایین‌ترین شکل ممکن کاهش دهیم؛ بنابراین تابع هدف مساله کدگذاری شبکه تحت محدودیت پایداری به‌صورت:

$$\min \max_{h \in H}\Big\{\sum_{e \in A_h} c_e z_e^h\Big\} \qquad (۲۲)$$

بیان می‌شود. برای خطی کردن عبارت (۲۲)، متغیر t را به‌صورت:

$$t = \max_{h \in H}\Big\{\sum_{e \in A_h} c_e z_e^h\Big\}$$

تعریف می‌کنیم. در نتیجه عبارت (۲۲) به‌صورت:

$$\begin{aligned} &\min \quad t && (۲۳)\\ &s.t. \\ &\sum_{e \in A_h} c_e z_e^h \leq t, \qquad \forall h \in H \end{aligned}$$

تغییر می‌یابد. در این صورت با استفاده از روابط ذکر شده (۲۱)، (۲۲) و (۲۳)، شبکه کدگذاری پایدار به‌صورت:

$$\begin{aligned} &\min \quad t && (۲۴)\\ &s.t. \\ &\sum_{e \in A_h} c_e z_e^h \leq t, && \forall h \in H && (۲۵)\\ &\sum_{e \in \delta_i^+} w_e^{(k)h} - \sum_{e \in \delta_i^-} w_e^{(k)h} = \beta_i^{(k)}, && \forall i \in N_h, k \in K_h, h \in H && (۲۶)\\ &w_e^{(k)\circ} \leq \sigma_k R, && \forall e \in A, k \in K && (۲۷)\\ &\sum_{e \in \delta_i^+} w_e^{(k)\circ} \leq \sigma_k R, && \forall k \in K, i \in N - \{s \cup K\} && (۲۸)\\ &w_e^{(k)h} \leq z_e^h, && \forall e \in A_h, k \in K_h, h \in H && (۲۹)\\ &\sum_{h \in H} z_e^h \leq u_e, && \forall e \in A && (۳۰)\\ &w_e^{(k)h} \geq \circ, && \forall e \in A_h, k \in K_h, h \in H && (۳۱) \end{aligned}$$

مدل‌بندی می‌شود که در آن $\beta_i^{(k)}$ به‌صورت

$$\beta_i^{(k)} = \begin{cases} \rho_k R, & if \quad i = s \\ -\rho_k R, & if \quad i = k \\ \circ, & o.w. \end{cases}$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.4.3]

بیان می‌شود. همان‌گونه که مشاهده می‌کنید، تابع هدف مدل (۲۴)، هزینه بدترین حالت شکست را (قید (۲۵))، کمینه می‌کند. دسته قیود (۲۶) همان قیود تعادل جریان را نشان می‌دهد. همچنین قیود (۲۷) و (۲۸)، قیود پراکنده‌سازی شبکه را تشکیل می‌دهند. قیود (۲۹) و (۳۰) را قیود کدگذاری گوییم. دسته قیود (۲۹) نشان می‌دهد که متغیرهای جریان $w_e^{(k)h}$ در شکست $h \in H$، یک کران پایین برای نرخ کدگذاری $z_e{}^h$ هستند. قیود (۳۰) میزان پهنای باند مصرفی برای هر کمان $e \in A$، در کل حالت‌های شکست را مشخص می‌کند.

در ادامه قصد داریم تا راه حل مناسبی را برای مدل پیشنهادی (۲۴) ارایه دهیم. با توجه به ساختار مدل مساله (۲۴)، قیود (۲۵) و(۲۹)، قیود پیوندی هستند. با آزادسازی این دو قید می‌توانیم مساله پیشنهادی (۲۴) را به چند زیرمساله کوچک تبدیل کنیم که به‌راحتی توسط راه حل‌های مناسب قابل حل می‌باشند؛ بنابراین با حل این زیرمسایل می‌توانیم به حل مساله اصلی بپردازیم. از این‌رو، روش آزادسازی لاگرانژ را برای حل مدل پیشنهادی (۲۴) بیان می‌کنیم و سپس توسط یک روش بهنگام سازی تکراری که سرعت همگرایی بیش‌تری نسبت به الگوریتم زیرگرادیان دارد [۱۹، ۲۰]، بهترین جواب بهینه را برای مساله اصلی به‌دست می‌آوریم؛ بنابراین مساله پیشنهادی انتخاب زیرگراف کدگذاری شده تحت محدودیت پایداری را با استفاده از روش آزادسازی لاگرانژ حل خواهیم نمود. در ادامه بعد از بیان پیچیدگی مساله پیشنهادی، به معرفی روش آزادسازی لاگرانژ خواهیم پرداخت.

لم ۱. مساله پیشنهادی انتخاب زیرگراف کدگذاری شده تحت محدودیت پایداری، جزء کلاس مسایل چندجمله‌ای می‌باشد.

اثبات. چون مدل انتخاب زیرگراف کدگذاری شده تحت محدودیت پایداری از نوع برنامه‌ریزی خطی پیوسته می‌باشد پس واضح است که جزء کلاس مسایل چند جمله‌ای می‌باشد [۱۹]. □

با توجه به برنامه‌ریزی خطی بودن مدل انتخاب زیرگراف کدگذاری شده تحت محدودیت پایداری، می‌توان این مدل را با الگوریتم‌های از چندجمله‌ای حل نمود؛ ولی با توجه به ساختار ویژه بودن این مدل (وجود قیود پیوندی (۲۵) و (۲۹)) این مدل را در ادامه با الگوریتم آزادسازی لاگرانژ حل خواهیم نمود.

٤ روش حل

٤-١ الگوریتم آزادسازی لاگرانژ

برای تجزیه و حل مدل‌های از نوع برنامه‌ریزی خطی، روش‌های حل مختلفی وجود دارد؛ ولی روش آزادسازی لاگرانژ تنها روشی است که برای همه مدل‌ها از جمله مدل‌های با ساختار ویژه و اندازه-بزرگ قابل اجرا و انعطاف پذیر می‌باشد. این انعطاف‌پذیری باعث کلی‌تر شدن این الگوریتم در مقایسه با الگوریتم‌های دیگر شده است. روش آزادسازی لاگرانژ، مدل را به چند زیرمساله تبدیل کرده و زیر مسایل را به‌عنوان مسایل مستقل با استفاده از الگوریتم‌های مختلف و شناخته شده حل می‌کند. روش آزادسازی لاگرانژ با تولید جواب به‌صورت تکراری و مداوم از زیر مسایل به‌دست آمده، کران‌های مناسبی را برای جواب بهینه مساله اصلی به‌وجود می‌آورد. کران‌های به‌وجود آمده لزوما جواب بهین را مشخص نمی‌کنند؛ اما هر چه تعداد تکرارهای الگوریتم بیش‌تر و

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.4.3]

فاصله کران‌ها از مقدار بهین تابع هدف مساله اصلی کم‌تر باشد، کارایی الگوریتم بیش‌تر خواهد بود. الگوریتم معمولا زمانی متوقف می‌شود که فاصله کران به‌دست آمده تا جواب بهین تابع هدف مساله اصلی از مقدار فاصله تعیین شده کم‌تر باشد.

برای توصیف شکل کلی روش آزادسازی لاگرانژ، فرض می‌کنیم x برداری از متغیرهای تصمیم باشد، مدل کلی مساله بهینه‌سازی

$$\begin{aligned} g^* = \ & \min\ cx \\ & s.t. \\ & Ax = b, \\ & x \in X, \end{aligned} \qquad (۳۲)$$

را درنظر می‌گیریم. این مدل دارای تابع هدف و محدودیت‌های خطی است. مجموعه X نیز مجموعه‌ای از محدودیت‌هاست که x در آن‌ها صدق می‌کند. در این روش، ابتدا با آزادسازی تعدادی از محدودیت‌های خطی مدل و انتقال آن‌ها به تابع هدف با یک ضریب جریمه مانند μ که به ضریب لاگرانژ معروف است، مدل مساله اصلی را به تعدادی زیرمساله تبدیل می‌کنیم؛ بنابراین، مدل (۳۲) با آزادسازی محدودیت‌های $Ax = b$ به‌صورت مدل

$$\begin{aligned} g^* = \ & \min\ cx+\mu(Ax-b) \\ & s.t. \quad x \in X, \end{aligned} \qquad (۳۳)$$

تبدیل می‌شود. مدل به‌دست آمده (۳۳) را زیرمساله لاگرانژ از مساله اصلی گوییم. همچنین عبارت

$$L(\mu) = \min\ \{cx+\mu(Ax-b):\ x \in X\}$$

را تابع لاگرانژ می‌نامیم. تابع لاگرانژ $L(\mu)$ همواره برای μ دلخواه، یک کران پایین برای تابع هدف بهینه g^* تولید می‌کند. این موضوع را در قالب یک لم بیان می‌کنیم.

لم۲. برای هر بردار μ از ضرایب لاگرانژ، مقدار تابع هدف لاگرانژ $L(\mu)$، یک کران پایین برای تابع هدف بهینه g^* از مساله اصلی است [۱۹، ۲۰].

برای به‌دست آوردن بهترین کران پایین، نیاز به حل عبارت

$$L^* = \max_{\mu} L(\mu)$$

داریم که به این مساله، مساله ضرایب لاگرانژ نسبت به مساله اصلی می‌گوییم. مقدار بهینه L^* از مساله ضرایب لاگرانژ، باتوجه به لم۲ همیشه یک کران پایین برای تابع هدف مساله اصلی است؛ یعنی:

$$L^* \le g^*.$$

حال مقایسه کلی بین همه مقادیر توابع هدف مساله ضرایب لاگرانژ و مساله بهینه‌سازی برای هر انتخاب از ضریب لاگرانژ μ با هر جواب شدنی x از مساله اصلی نشان می‌دهد که عبارت

$$L(\mu) \le L^* \le g^* \le cx \qquad (۳۴)$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.4.3]

همواره برقرار است. در ادامه فرض کنیم اگر به ازای یک مقدار μ و یک جواب شدنی x از مساله اصلی، عبارت $L(\mu)=cx$ برقرار باشد آن‌گاه باتوجه به رابطه (۲۳)، $L(\mu)=L^*$ و x یک جواب بهین برای مساله اصلی است.

نزدیک بودن فاصله $L(\mu)=cx$ به مقدار بهین تابع هدف مساله اصلی دارای اهمیت بالایی است. این فاصله برای مسایل مختلف، از رابطه‌های متفاوتی سنجیده می‌شود. یکی از این روابط به‌صورت:

$$GAP=\left|\frac{L(\mu)-cx}{L(\mu)}\right|$$

محاسبه می‌شود. کوچک‌تر بودن این مقدار، نزدیکی بیش‌تر به جواب بهینه را نشان می‌دهد و معیاری برای سنجش همگرایی روش لاگرانژ نیز می‌باشد.

در ادامه روش آزادسازی لاگرانژ را برای حل مساله پیشنهادی شبکه کدگذاری شده تحت محدودیت پایداری (۲۴) بیان خواهیم نمود.

٤-۲ تجزیه لاگرانژ برای حل مساله انتخاب زیرگراف کدگذاری شده (۲٤)

محدودیت‌های (۲۵) و (۲۹) از مدل پیشنهادی (۲۴) با مفهوم کدگذاری بر روی شبکه‌های پایدار، محدودیت‌های پیوندی هستند. با آزادسازی این دو محدودیت، مساله بهینه‌سازی به سه زیرمساله متناظر با متغیرهای t,z,w افراز می‌شود. در این صورت با آزادسازی محدودیت (۲۹) با بردار لاگرانژ γ و آزادسازی محدودیت (۲۵) با بردار لاگرانژ η، مساله آزاد شده لاگرانژ به‌صورت:

$$\min\ t+\sum_{h\in H}\eta^h\Big(\sum_{e\in A_h}c_e z_e^h-t\Big)+\sum_{h\in H}\sum_{e\in A_h}\sum_{k\in K_h}\gamma_e^{(k)h}\big(w_e^{(k)h}-z_e^h\big) \qquad (۳۵)$$

با محدودیت‌های (۲۶)، (۲۷)، (۲۸)، (۳۰) و (۳۱)

به‌دست می‌آید.

اگر تابع هدف مساله آزاد شده (۳۵) را دوباره بازنویسی کنیم، آن‌گاه مدل

$$\min\ \ (1-\sum_{h\in H}\eta^h)t+\sum_{h\in H}\sum_{e\in A_h}(c_e\eta^h-\sum_{k\in K_h}\gamma_e^{(k)h})z_e^h+\sum_{h\in H}\sum_{e\in A_h}\sum_{k\in K_h}\gamma_e^{(k)h}w_e^{(k)h} \qquad (۳۶)$$

با محدودیت‌های (۲۶)، (۲۷)، (۲۸)، (۳۰) و (۳۱)

خواهیم داشت. در این صورت مساله بهینه‌سازی آزاد شده را می‌توان به سه زیرمساله مجزا افراز کرد. در زیرمساله اول برای هر $h\in H$، مدل (۳۷) با تابع هدف $g^{(k)h}(\gamma)$ به‌صورت:

$$g^{(k)h}(\gamma)=\ \min\sum_{h\in H}\sum_{e\in A_h}\sum_{k\in K_h}\gamma_e^{(k)h}w_e^{(k)h} \qquad (۳۷)$$

s.t.

$$\sum_{e\in\delta_i^+}w_e^{(k)h}-\sum_{e\in\delta_i^-}w_e^{(k)h}=\beta_i^{(k)}, \qquad \forall i\in N_h,k\in K_h,h\in H$$

$$w_e^{(k)\circ}\le\sigma_k R, \qquad \forall e\in A,k\in K$$

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.4.3]

$$\sum_{e\in\delta_i^+} w_e^{(k)\circ} \le \sigma_k R, \qquad \forall k\in K, i\in N-\{s\cup K\}$$
$$w_e^{(k)h} \ge \circ, \qquad \forall e\in A_h, k\in K_h, h\in H$$

جداسازی می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، زیرمساله (۳۷) در هر یک از حالت‌های شکست $h\neq\circ$، به تعداد $|K_h|$ مساله کوتاه‌ترین مسیر مستقل برای هر مقصد $k\in K_h$ تبدیل و به‌راحتی با استفاده از الگوریتم‌های مربوطه حل می‌شوند [۱۶].

همین‌طور در حالت $h=\circ$، برای هر مقصد $k\in K$، یک مساله کوتاه‌ترین مسیر از گره مبدا s به گره مقصد k را خواهیم داشت که توسط روش ذکر شده در [۹] حل خواهد شد. به این‌گونه که هر مساله کوتاه‌ترین مسیر برای $k\in K$، به‌وسیله گروهی از $\left\lceil \frac{1}{\sigma_k} \right\rceil$ مسیرهای مجزا بین گره مبدا s و گره مقصد k حل می‌شود. همچنین فرض می‌کنیم که لیست L_k همه مسیرهای بین گره مبدا s و مقصد k باشد، برای هر مسیر p در لیست L_k، هزینه هر مسیر را به‌صورت $C_p=\sum_{e\in p}\gamma_e^{(k)}$ محاسبه می‌کنیم. سپس لیست را به‌ترتیب نزولی از C_p مرتب می‌کنیم و سپس با استفاده از الگوریتم دایجسترا [۱۹] به حل این مساله می‌پردازیم. این زیرمسایل برای به‌دست آوردن جواب‌های شدنی بهتر و کران‌های پایینی که به جواب بهینه نزدیک‌ترند، موثر هستند.

به‌طور کلی زیرمساله (۳۷)، به تعداد $\sum_{h\in H}|K_h|$ مساله کوتاه‌ترین مسیر مستقل تبدیل و حل می‌شود. زیرمساله دوم از مساله آزادشده لاگرانژ (۳۶) با تابع هدف متناظر برای متغیر z به‌صورت:

$$g^{(e)}(\eta,\gamma) = \min \sum_{h\in H}\sum_{e\in A_h}(c_e\eta^h - \sum_{k\in K_h}\gamma_e^{(k)h})z_e^h \qquad (۳۸)$$
$$s.t.$$
$$\sum_{h\in H} z_e^h \le u_e, \qquad \forall e\in A$$
$$z_e^h \ge \circ, \qquad \forall e\in A_h, h\in H$$

مدل‌بندی می‌شود. زیرمساله (۳۸) نیز همان‌طور که مشاهده می‌کنید به $|A|$ مساله بهینه‌سازی مستقل برای هر $e\in A$ تبدیل و حل می‌شود. همچنین زیرمساله سوم برای به‌دست آوردن مقدار t به‌صورت:

$$g^{(\circ)}(\eta) = \min(1-\sum_{h\in H}\eta^h)t \qquad (۳۹)$$
$$s.t. \qquad t\ge\circ,$$

بیان می‌شود. این مساله نیز یک مساله خطی پیوسته می‌باشد که به‌راحتی توسط روش‌های حل استاندارد حل خواهد شد [۱۹]. در ادامه، با استفاده از یک الگوریتم تکراری به حل مساله آزادسازی لاگرانژ (۳۶) می‌پردازیم.

۴-۳ الگوریتم تکراری

مرحله ∘: با بردارهای ثابت γ و η شروع می‌کنیم و برای به‌دست آوردن $g^{(k)h}(\gamma)$ و $w^{(k)h}$، مدل (۳۷) را در شکست‌های $h\in H$ برای هر $k\in K_h$ جداگانه حل می‌کنیم. آنگاه برای محاسبه $g^{(e)}(\eta,\gamma)$ و z، مدل

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.4.3]

(۳۸) را نیز برای هر $e \in A$ حل می‌کنیم. همچنین برای محاسبه $g^{(\circ)}(\eta)$ و t، مدل (۳۹) را حل کرده و سپس قرار می‌دهیم:

$$f = \sum_{h\in H}\sum_{k\in K_h} g^{(k)h}(\gamma) + \sum_{e\in A} g^{(e)}(\eta,\gamma) + g^{(\circ)}(\eta),$$
$$w^{(k)h}(\circ) = w^{(k)h},$$
$$z(\circ) = z,$$
$$t(\circ) = t,$$
$$q = ۱.$$

مرحله ۱: در ابتدا:

$$\gamma_e^{(k)h}(q) = [\gamma_e^{(k)h} + \varepsilon(w_e^{(k)h} - z_e^h)]^+$$

و

$$\eta^h(q) = [\eta^h + \alpha(\sum_{e\in A_h} c_e z_e^h - t)]^+$$

را محاسبه می‌کنیم. نماد $[.]^+$ به این معنا است که γ و η یک مقدار نامنفی می‌باشند. پارامتر ε و α نیز یک مقدار مثبت هستند که همگرایی الگوریتم را ضمانت می‌کنند [۱۷]. با قرار دادن مقدار $\gamma(q)$ و $\eta(q)$، مدل (۳۷)، (۳۸) و (۳۹) را دوباره حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم که $w^{(k)h}(q)$، $z(q)$ و $t(q)$ جواب‌های متناظر به‌دست آمده در $g^{(k)h}(\gamma(q))$، $g^{(e)}(\eta(q),\gamma(q))$ و $g^{(\circ)}(\eta(q))$ باشند. باز قرار می‌دهیم:

$$f(q) = \sum_{h\in H}\sum_{k\in K_h} g^{(k)h}(\gamma(q)) + \sum_{e\in A} g^{(e)}\left(\eta(q),\gamma(q)\right) + g^{(\circ)}(\eta(q))\Big).$$

آنگاه $w^{(k)h}$، t و z را بهنگام کرده و می‌نویسیم

$$w^{(k)h} := \pi\, w^{(k)h}(q) + (۱-\pi)w^{(k)h},$$
$$z := \pi\, z(q) + (۱-\pi)z,$$
$$t := \pi\, t(q) + (۱-\pi)t,$$

که π یک مقدار حقیقی بین $\circ$ و ۱ می‌باشد.

مرحله ۲: در این مرحله از الگوریتم اگر $f(q) > f$ آنگاه γ را به‌صورت:

$$\gamma := \gamma(q)$$

و η را به‌صورت:

$$\eta := \eta(q)$$

و همچنین f را به‌صورت:

$$f := f(q)$$

تغییر داده و سپس قرار می‌دهیم $q := q+۱$ و به مرحله ۱ باز می‌گردیم.

در ادامه نشان خواهیم داد که اعمال مفهوم کدگذاری بر روی شبکه‌های جریان پایدار، باعث بهبود عملکرد شبکه خواهد شد. این ادعا را در بخش بعد با مقایسه نتایج حاصل از حل عددی مساله پیشنهادی (۲۵) نسبت به مساله پایداری فاقد کدگذاری (۱) نشان خواهیم داد.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.4.3]

۵ نتایج محاسباتی

در این بخش قصد داریم نتایج محاسباتی حاصل از حل مساله پایداری در شبکه‌های جریان (مدل شماره (۱)) و مساله انتخاب زیرگراف کدگذاری بهینه تحت محدودیت پایداری (مدل شماره (۲۵)) را با یکدیگر مقایسه کنیم و سپس به تفسیر آن‌ها بپردازیم. هدف از انجام این مقایسه، تضمین بهبود تابع هدف مساله پایداری هنگامی است که شبکه را تحت مفهوم کدگذاری بررسی می‌کنیم. نشان خواهیم داد که با اعمال کدگذاری روی شبکه‌های جریان با محدویت پایداری، هزینه انتخاب زیرگراف بهینه کاهش خواهد یافت که این مزیت کدگذاری را نشان خواهد داد.

مدل‌های پیشنهادی در نرم افزار GAMS 24.1.3 کدنویسی و با حل‌کننده CPLEX 12.5.1 (با استفاده از روش شاخه-کران) حل شده‌اند. این نتایج در جدول ۱ آورده شده‌است. در جدول۱ هر دو مساله بر روی شبکه پروانه‌ای با ۷-گره، ۹-کمان نشان داده شده در شکل ۱ با پارامترهای پراکندگی و ذخیره‌سازی مشخص شده در سه حالت شکست

$$H = \{۳, (۳, ۴), (۱, k_۱)\}$$

حل شده‌اند.

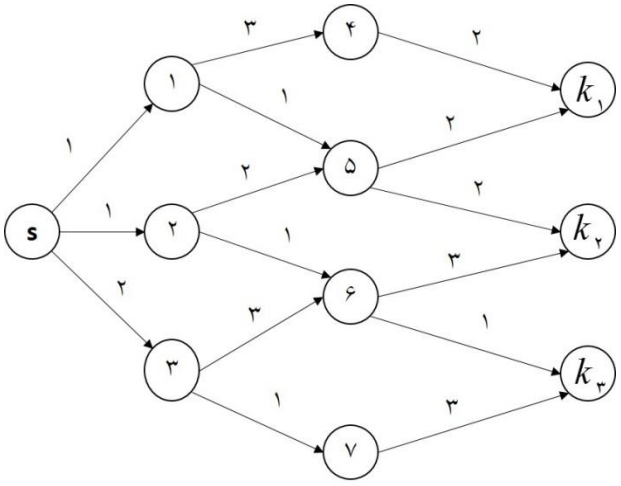
جدول۱. نتایج عددی بر روی شبکه پروانه‌ای نشان داده شده در شکل ۱

نوع مساله	$R=۲$ $\sigma=۰/۷$ $\rho=۰/۸$	$R=۳$ $\sigma=۰/۷$ $\rho=۰/۸$	$R=۴$ $\sigma=۰/۷$ $\rho=۰/۸$	متوسط هزینه
مقدار تابع شبکه بدون کدگذاری (مدل (۱))	۳۴	۵۱	۶۸	۵۱
مقدار تابع هدف شبکه کدگذاری شده (مدل (۲۴))	۲۲	۳۳	۴۴	۳۳

همان‌طور که در جدول۱ مشاهده می‌کنید، دو مساله ذکر شده را با سه مثال عددی (با تغییرات بر روی نرخ اطلاعات ارسالی R) مقایسه کرده‌ایم. در مقایسه‌های انجام شده در جدول۱، مشاهده می‌کنید که مقدار تابع هدف مساله کدگذاری تحت محدودیت پایداری از مساله پایداری فاقد کد، کم‌تر می‌باشد؛ بنابراین می‌توان از این مقایسه نتیجه گرفت که کدگذاری بر روی شبکه‌های پایدار، باعث بهبود عملکرد شبکه و کم‌تر کردن هزینه می‌شود. از روی ستون آخر جدول ۱ واضح است که با اعمال‌گذاری روی مدل مساله پایداری، هزینه به طور میانگین ٪۶۴ کاهش می‌یابد.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.4.3]



شکل۳. شبکه با ۱۱-گره و ۱۵-کمان با هزینه بر روی کمان‌ها

جدول۲. نتایج عددی بر روی شبکه نشان داده شده در شکل ۳

نوع مساله	$R=۲$ $\sigma=۰/۶$ $\rho=۰/۷$	$R=۲$ $\sigma=۰/۸$ $\rho=۰/۸$	$R=۴$ $\sigma=۰/۷$ $\rho=۰/۶$	متوسط هزینه
مقدار تابع شبکه بدون کدگذاری (مدل ((۱))	۳۲/۸	۴۹/۲	۶۵	۴۹
مقدار تابع هدف شبکه کدگذاری شده (مدل (۲۴))	۱۹	۲۸	۳۸	۲۸/۳۳

در جدول۲، هر دو مساله را بر روی شبکه نسبتا بزرگ‌تری با ۱۱-گره، ۱۵-کمان نشان داده شده در شکل ۳ و همچنین با مشخص بودن مقادیر پارامترهای پراکندگی

$$\sigma_1=۰/۶, \sigma_2=۰/۸, \sigma_3=۰/۷$$

و پارامترهای ذخیره‌سازی

$$\rho_1=۰/۷, \rho_2=۰/۸, \rho_3=۰/۶$$

در سه حالت شکست مقایسه کرده‌ایم. در این شبکه سعی شده است تا از پارامترهای پراکنده‌سازی و ذخیره‌سازی متفاوتی نسبت به شبکه قبل استفاده کنیم. از روی ستون آخر واضح است که برای این شبکه نیز، اعمال‌گذاری روی مدل مساله پایداری به طور میانگین به اندازه ٪۵۸ موجب کاهش هزینه شده است. پس، نتایج موجود در جدول‌های ۱ و ۲ ادعای ما را مبنی بر مزیت کدگذاری روی شبکه‌های جریان پایدار تایید می‌کنند.

٦ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله همان‌گونه که مشاهده کردید، با به‌کارگیری مفهوم کدگذاری شبکه بر روی مساله پایداری در شبکه‌های جریان [۹]، علاوه بر حفظ پایداری شبکه، هزینه ارسال جریان را در شبکه کمینه‌تر کردیم. همچنین با ارایه نتایج عددی به مقایسه مسایل مطرح شده در این مقاله پرداختیم و همان‌گونه که مشخص شد، اعمال

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.4.3]

کدگذاری بر روی شبکه‌های تحت محدودیت پایداری باعث بهبود عملکرد سیستم در انتخاب زیرگراف بهینه می‌شود.

در تحقیقات آتی نیز می‌توان موارد زیر را در نظر گرفت:

۱) اعمال مفهوم پایداری بر روی p -دورها که نسبت به مفاهیم پراکنده‌سازی و ذخیره‌سازی دارای عملکردی بهتر می‌باشند [۲۱] و سپس می‌توان با ارایه کدگذاری بر روی آن، عملکرد شبکه را از پیش بهتر نمود.

۲) می‌توان مساله پیشنهادی را در یک محیط عدم قطعیت در نظر گرفته و با رویکرد بهینه‌سازی استوار حل نمود.

منابع

[۲۰] سجادی، س.س.، معین مقدس، ف.، کریمی،ح.، (۱۳۹۷). مساله پوشش هاب تک تخصیصی بر روی شبکه ستاره‌ای؛ مدل‌بندی، خطی‌سازی و یافتن کران مناسب برای آن. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۵(۱)، ۱۰۲-۷۹.

[1] Ahlswede, R., Cai, N., Li, S.Y., Yeung, R. W. (2000). Network information flow. IEEE Transactions on information theory, 46(4), 1204-1216.

[2] Li, S.Y., Yeung, R.W., Cai, N., (2003). Linear network coding. IEEE transactions on information theory, 49(2), 371-381.

[3] Jaggi, S., Sanders, P., Chou, P.A., Effros, M., Egner, S., Jain, K., Tolhuizen, L.M. (2005). Polynomial time algorithms for multicast network code construction. IEEE Transactions on Information Theory, 51(6), 1973-1982.IEEE Transactions on Information Theory, 51(6), 1973–1982.

[4] Chou, P.A., Wu, Y., Jain, K. (2003). Practical network coding. In Proceedings of the annual Allerton conference on communication control and computing, (41)1, 40-49.

[5] Cheng, M., Ye, Q., Cheng, X., Cai, L. (2016). Maximizing coding gain in wireless networks with decodable network coding. In Communications (ICC), IEEE International Conference on IEEE, 1-6.

[6] Raayatpanah, M.A., Fathabadi, H.S., Bahramgiri, H., Pardalos, P.M. (2015). Optimal-constrained multicast sub-graph over coded packet networks. Journal of Combinatorial Optimization, 29(4), 723-738.

[7] Ghasvari, H., Raayatpanah, M.A., Pardalos, P.M. (2016). A robust optimization approach for multicast network coding under uncertain link costs. Optimization Letters, 1-16.

[8] Aghayi, N., Tavana, M., Raayatpanah, M.A. (2016). Robust efficiency measurement with common set of weights under varying degrees of conservatism and data uncertainty. European Journal of Industrial Engineering, 10(3), 385-405.

[9] Rios, M., Marianov, V., and Gutierrez, M. (2000). Survivable capacitated network design problem: new formulation and lagrangean relaxation. Journal of the Operational Research Society, 51(5), 574–582.

[10] Addis, B., Carello, G., Mattia, S. (2016). Energy-aware survivable networks. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 52, 133-140.

[11] Rodríguez-Martín, I., Salazar-González, J.J., Yaman, H. (2016). Hierarchical Survivable Network Design Problems. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 52, 229-236.

[12] Bui, L.T., Binh, H.T.T. (2016). A survivable design of last mile communication networks using multi-objective genetic algorithms. Memetic Computing, 8(2), 97-108.

[13] Ljubić, I., Mutzel, P., Zey, B. (2017). Stochastic survivable network design problems: Theory and practice. European Journal of Operational Research, 256(2), 333-348.

[14] Shen, G., Guo, H., Bose, S.K. (2016). Survivable elastic optical networks: survey and perspective. Photonic Network Communications, 31(1), 71-87.

[15] Gouveia, L., Leitner, M. (2017). Design of survivable networks with vulnerability constraints. European Journal of Operational Research, 258(1), 89-103.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.4.3]

[16] Lun, D.S., Ratnakar, N., Médard, M., Koetter, R., Karger, D.R., Ho, T., Zhao, F. (2006). Minimum-cost multicast over coded packet networks. IEEE Transactions on information theory, 52(6), 2608-2623.
[17] Ghasvari, H., Raayatpanah, M. A., Khalaj, B. H., Bakhshi, H. (2011). Optimal sub-graph selection over coded networks with delay and limited-size buffering. IET communications, 5(11), 1497-1505.
[18] Raayatpanah, M. A., Pardalos, P. M. (2018). Reliability evaluation of a multicast over coded packet networks. Journal of Combinatorial Optimization, 35(3), 921-940.
[19] Ahuja, R.K, Magnanti, T.L, Orlin, J.B. (1993). Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA.
[21] Myung, Y. S., Kim, H. J., Tcha, D. W. (1999). Design of communication networks with survivability constraints. Management Science, 45(2), 238-252.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-28]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2019.16.1.4.3]