مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، سال سیزدهم، شماره اول (پیاپی ۴۸)، بهار ۹۵، ص ص ۹۵-۸۵
شاپا ۷۲۸۶-۲۲۵۱

ارایه‌ی یک هدف ثانویه برای ارزیابی کارایی متقاطع در تحلیل پوششی داده‌ها با خروجی نامطلوب

بلال کریمی[۱]، اسماعیل خرم*[۲]
۱- دانشجوی دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، گروه ریاضی، کرج، ایران
۲- استاد، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، گروه ریاضی، تهران، ایران

رسید مقاله: ۱۷ شهریور ۱۳۹۴
پذیرش مقاله: ۷ بهمن ۱۳۹۴

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک تکنیک برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیری (DMU_s) با چندین ورودی و خروجی است. در تحلیل پوششی داده‌ها هر واحد تصمیم‌گیری برای به دست آوردن نمره‌ی کارایی، مطلوب‌ترین وزن‌ها را انتخاب می‌کند؛ اما طبیعت خودارزیابی و انعطاف‌پذیری DEA در انتخاب وزن‌های بهینه‌ی واحدهای تصمیم‌گیری مورد انتقاد است؛ بنابراین در تحلیل پوششی داده‌ها روش‌های ارزیابی کارایی متقاطع معرفی شدند. همان‌طور که می‌دانیم واحدهای تصمیم‌گیری علاوه بر خروجی‌های مطلوب، خروجی‌های نامطلوبی مانند گازهای گلخانه‌ای تولید می‌کنند. در تحلیل پوششی داده‌ها مدل‌هایی برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیری با خروجی نامطلوب ارایه شده است. هدف از این مقاله ارایه‌ی روش‌هایی برای ارزیابی کارایی متقاطع واحدهای تصمیم‌گیری با خروجی‌های نامطلوب است. به این‌صورت که با گسترش مدل‌های موجود در حوزه‌ی خروجی نامطلوب، چند مدل هدف ثانویه برای ارزیابی کارایی متقاطع واحدهای تصمیم‌گیری با خروجی نامطلوب ارایه می‌دهیم. مدل های ارایه شده بر پایه‌ی مدل‌های چندهدفه می‌باشد. در نهایت با یک مثال از دنیای واقعی، اهمیت موضوع را نشان خواهیم داد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی متقاطع، خروجی نامطلوب، اهداف ثانویه.

۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) روشی برای اندازه‌گیری کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری (DMU_s) مشابه با چندین شاخص ورودی و خروجی است و یکی از روش‌های مؤثر در شناسایی بهترین مرزهای کارایی می‌باشد. انعطاف‌پذیری آن در انتخاب وزن‌های ورودی و خروجی‌ها و طبیعت خودارزیابی آن مورد انتقاد قرارگرفته است. روش ارزیابی کارایی متقاطع به عنوان گسترشی از روش تحلیل پوششی داده‌هاست که می‌تواند برای

* عهده‌دار مکاتبات
آدرس الکترونیکی: eskhor@aut.ac.ir

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]
[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.1.6.4]

شناسایی بهترین عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری و رتبه‌بندی آن‌ها با استفاده از اندازه‌ی کارایی متقاطع که به تمام واحدهای تصمیم‌گیری ارتباط پیدا می‌کند، مورداستفاده قرار گیرد [۱]. هدف اصلی ارزیابی متقاطع به‌کارگیری تحلیل پوششی داده‌ها در ارزیابی رقیب گونه[1] به‌جای خودارزیابی[2] است. ارزیابی متقاطع دو مزیت اصلی دارد:

۱- یک رتبه‌بندی منحصربه‌فرد برای واحدهای تصمیم‌گیری ارایه می‌دهد.

۲- بدون نیاز به محدودیت‌های وزنی حاصل از به‌کارگیری حوزه‌ی تخصصی، طرح‌های وزنی غیرواقعی را حذف می‌کند [۲].

در هر صورت، همان‌طور که دویل و گرین [۳] اشاره‌کرده‌اند، عدم منحصربه‌فرد بودن وزن‌های احتمالی بهینه‌ی تحلیل پوششی داده‌ها، ممکن است سودمندی کارایی متقاطع را کاهش دهد. به‌ویژه، اندازه‌ی کارایی متقاطع به‌دست‌آمده از مدل‌های پایه‌ای تحلیل پوششی داده‌های عموماً منحصربه‌فرد نیست و بسته به اینکه کدام‌یک از جواب‌های بهینه‌ی برنامه‌ریزی خطی در تحلیل پوششی داده‌ها به کار رود، ممکن است میزان عملکرد (کارایی متقاطع) یک واحد تصمیم‌گیری با بدتر کردن میزان عملکرد بقیه‌ی واحدها بهبود یابد. سکستون و همکاران [۱] و دویل و گرین [۳] استفاده از اهداف ثانویه را برای برطرف کردن نتیجه‌ی غیر منحصربه‌فردی پیشنهاد کردند. آن‌ها فرمول‌بندی‌های مدل خصمانه[3] و دوستانه[4] را ارایه کردند. به‌عنوان‌مثال، در مورد مدل دوستانه ایده به دست آوردن وزن‌های بهینه‌ای است که کارایی یک واحد تصمیم‌گیری معین تحت ارزیابی را ماکزیمم کند و هم‌چنین متوسط کارایی سایر واحدهای تصمیم‌گیری را نیز ماکزیمم نماید. در مورد مدل خصمانه وزن‌هایی را جستجو می‌کند که متوسط کارایی سایر واحدهای را مینیمم کند.

گاهی اوقات ممکن است در بین خروجی‌ها، خروجی نامطلوب نیز وجود داشته باشد. نمونه‌هایی از خروجی‌های نامطلوب عبارت است از: گازهای گلخانه‌ای تولیدی صنایع، پرداخت مالیات در مراکز تجاری و.... ابتدا فار و همکاران [۴] به ارایه‌ی مدلی برای ارزیابی کارایی در حضور خروجی‌های نامطلوب پرداختند. مدل فار و همکاران [۴] که یک مدل غیرخطی بود بر پایه‌ی افزایش خروجی‌های مطلوب و کاهش خروجی‌های نامطلوب می‌باشد. در ادامه سیفورد و ژو [۵] با توجه به پایداری مدل فار و همکاران نسبت به انتقال داده‌ها، یک مدل خطی برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم در حضور خروجی‌های نامطلوب ارایه کردند. هنوز هم تحقیقات در این جهت ادامه دارد [۶-۸].

در این مقاله با استفاده از مدل سیفورد و ژو [۵]، یک مدل برای ارزیابی کارایی متقاطع ارایه می‌نمایم. هم‌چنین در ادامه با توجه به وجود جواب بهینه‌ی چندگانه در مدل مضربی ارزیابی کارایی متقاطع، یک هدف ثانویه برای کارایی متقاطع ارایه خواهیم نمود. مدل ارایه‌شده مدلی چند هدفه است که همزمان کارایی واحدهای دیگر را نیز ماکزیمم می‌کند. درواقع یک هدف دوستانه خواهد داشت. مدل چند هدفه را با توجه به مدل‌های

[1] Peer evaluation
[2] Self-evaluation
[3] Aggressive
[4] Benevolent

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.1.6.4]

موجود در حوزه‌ی چند هدفه [۹] حل می‌کنیم. درنهایت با استفاده از یک مثال دنیای واقعی، اهمیت موضوع را نشان خواهیم داد.

دسته‌بندی زیر را برای این مقاله داریم: در بخش بعدی به ارایه‌ی روش کارایی متقاطع برای واحدهای تصمیم‌گیری با خروجی نامطلوب می‌پردازیم. در بخش ۳ به ارایه‌ی یک هدف ثانویه برای ارزیابی کارایی متقاطع با خروجی‌های نامطلوب خواهیم پرداخت. مدل ارایه‌شده یک مدل چند هدفه است و آن را با بعضی از روش‌های معروف چند هدفه حل می‌کنیم. در بخش ۴ به ارزیابی کارایی متقاطع ۱۶ استان چین با استفاده از مدل ارایه‌شده در این مقاله می‌پردازیم. بخش ۵ شامل نتیجه‌گیری است.

۲ کارایی متقاطع با خروجی نامطلوب

فرض کنید DMU_s، n داریم که با مصرف m ورودی، s خروجی مطلوب و h خروجی نامطلوب تولید می‌کنند. برای هر DMU_j $(j = 1,...,n)$ بردار نامنفی ورودی را با $x_j = (x_{1j},...,x_{mj})$ هم‌چنین بردار نامنفی خروجی‌های مطلوب و نامطلوب را به ترتیب با $y_j = (y_{1j},...,y_{sj})$ و $b_j = (b_{1j},...,b_{hj})$ نشان می‌دهیم. در این صورت با توجه به مدل سیفورد و ژو [۵]، مدل کسری خروجی محور برای ارزیابی DMU_d در حضور خروجی‌های نامطلوب، یک مدل به‌صورت زیر است:

$$E^*_{dd} = Min \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{id} + v_0}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rd} + \sum_{t=1}^{h} \eta_t \bar{b}_{td}}$$

$$s.t.$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + v_0}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + \sum_{t=1}^{h} \eta_t \bar{b}_{tj}} \geq 1, \qquad j = 1,...,n, \tag{1}$$

$$u_r \geq 0, \quad v_i \geq 0, \quad \eta_t \geq 0, \quad v_0 \ free \quad \forall r,i,t.$$

که در آن $\bar{b}_{tj} = -b_{tj} + \alpha_t (j = 1,...,n)$ و α_t یک عدد به‌اندازه‌ی کافی بزرگ می‌باشد که همه‌ی $\bar{b}_{tj}$ مثبت باشند. هم‌چنین $v_i (i = 1,...,m)$ وزن‌های مربوط به ورودی‌ها، $u_r (r = 1,...,s)$ وزن‌های مربوط به خروجی‌های مطلوب و $\eta_t (t = 1,...,h)$ وزن‌های مربوط به خروجی‌های نامطلوب و متغیرهای مدل هستند. مدل فوق یک مدل غیرخطی است و همواره مقدار کارایی، یعنی E^*_{dd} بزرگ‌تر یا مساوی ۱ هست.

نکته: مدل ارایه‌شده به‌وسیله‌ی سیفورد و ژو [۵] شبیه به مدل پوششی BCC است. این مدل با فرض بازده به مقیاس متغیر و پایداری نسبت به انتقال داده‌ها از مدل غیرخطی ارایه‌شده به‌وسیله‌ی فار و همکاران [۴] ساخته‌شده است. ایده‌ی ارایه‌شده مقاله‌ی فار و همکاران [۴] بر پایه‌ی افزایش خروجی‌های مطلوب و کاهش خروجی‌های نامطلوب می‌باشد. در اینجا با ایده گرفتن از رابطه‌ی بین مدل‌های پوششی و مضربی مربوط به مدل‌های پایه‌ای

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.1.6.4]

تحلیل پوششی داده‌ها (یعنی CCR یا BCC)، برای ارایه مدل کارایی متقاطع، دوآل مدل سیفورد و ژو [۵] را نوشته و آن را به‌صورت مدل کسری ۱ درآورده‌ایم.

فرض کنید که $\left(v^*, u^*, \eta^*, v_\circ^*\right)$ جواب بهینه‌ی مدل فوق (مدل ۱) باشد، دراین‌صورت مقدار کارایی DMU_d عبارت است از:

$$E_{dd}^* = Min \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i^* x_{id} + v_\circ^*}{\sum_{r=1}^{s} u_r^* y_{rd} + \sum_{t=1}^{h} \eta_t^* \bar{b}_{td}}$$

تعریف ۱: DMU_d کارا می‌باشد، هرگاه $E_{dd}^* = 1$.

هم‌چنین اگر $\left(v^*, u^*, \eta^*, v_\circ^*\right)$ جواب بهینه‌ی مدل (۱) باشد، آنگاه کارایی متقاطع DMU_k با توجه به وزن‌های بهینه، DMU_d عبارت است از:

$$E_{dk} = Min \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i^* x_{ik} + v_\circ^*}{\sum_{r=1}^{s} u_r^* y_{rk} + \sum_{t=1}^{h} \eta_t^* \bar{b}_{tk}}, \qquad k = 1,\ldots,n; \quad k \neq d$$

سپس $n-1$ کارایی محاسبه‌شده را به‌عنوان درایه‌های از سطر d ام ماتریس کارایی متقاطع در نظر می‌گیریم. پس از محاسبه، ماتریس کارایی متقاطع شاخص کارایی DMU_d به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E_d = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E_{kd}, \qquad d = 1,\ldots,n$$

در واقع میانگین ستونی برای اندازه‌ی شاخص کارایی متقاطع در نظر گرفته می‌شود. به‌این‌ترتیب شاخص کارایی متقاطع برای هر DMU محاسبه می‌شود.

۳ اهداف ثانویه در کارایی متقاطع با خروجی نامطلوب

همانند مدل‌های مضربی پایه‌ای در DEA، مدل (۱) نیز دارای جواب بهینه‌ی چندگانه است. جواب بهینه‌ی چندگانه‌ی مدل (۱) منجر به ماتریس‌های کارایی متقاطع متفاوتی خواهد شد. برای رفع این مشکل و به دست آوردن یک ماتریس کارایی متقاطع منحصربه‌فرد، در اینجا یک مدل هدف ثانویه ارایه خواهیم نمود. مدل ارایه‌شده در اینجا بر پایه‌ی حفظ مقدار کارایی واحد تصمیم‌گیری تحت ارزیابی؛ یعنی DMU_d و ماکزیمم کردن کارایی واحدهای دیگر به‌طور همزمان است. درواقع هدف ماکزیمم کردن کارایی $n-1$ واحد تصمیم‌گیری به‌طور همزمان می‌باشد. برای این کار از یک مدل چند هدفه با $n-1$ تابع هدف استفاده می‌کنیم که هر تابع هدف متناظر مقدار کارایی یک واحد تصمیم‌گیری است.؛ بنابراین مدل هدف ثانویه به‌صورت زیر بیان خواهد شد:

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.1.6.4]

$$
\begin{aligned}
&Min \ \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i1} + v_0}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r1} + \sum_{t=1}^{h} \eta_t \bar{b}_{t1}} \\
&Min \ \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i2} + v_0}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r2} + \sum_{t=1}^{h} \eta_t \bar{b}_{t2}} \\
&\quad \vdots \\
&Min \ \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{in} + v_0}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{m} + \sum_{t=1}^{h} \eta_t \bar{b}_{tn}} \\
&s.t. \\
&\quad \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + v_0}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + \sum_{t=1}^{h} \eta_t \bar{b}_{tj}} \geq 1, \qquad j = 1,\ldots,n, \\
&\quad \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{id} + v_0}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rd} + \sum_{t=1}^{h} \eta_t \bar{b}_{td}} = E_{dd}^{*}, \\
&u_r \geq 0, \quad v_i \geq 0, \quad \eta_t \geq 0, \ v_0 \ free \ \ \forall r,i,t.
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

مدل فوق یک مساله‌ی چند هدفه است [۹]. هدف از این مدل، حفظ کارایی DMU_d و ماکزیمم نمودن کارایی DMUهای دیگر به‌طور همزمان است. درواقع مدل فوق یک مدل هدف ثانویه با رویکرد دوستانه است. محدویت اول در مدل (۲) برای حفظ مقدار کارایی DMU_d به مدل اضافه‌شده است.

در مدل فوق می‌توان به‌جای مینیمم‌سازی از ماکزیمم‌سازی استفاده کرد. این نوع مدل یک هدف خصمانه خواهد بود؛ زیرا در این مورد، مدل به دنبال مینیمم کردن کارایی واحدهای تصمیم‌گیری دیگر است.

در مسایل چند هدفه روش‌های زیادی برای حل مدل (۲) وجود دارد. در تمامی روش‌ها هدف تبدیل مساله‌ی چند هدفه به یک مدل تک هدفه و حل آن با استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی است [۹]. در ادامه دو روش برای حل این مساله‌ی چند هدفه ارایه می‌دهیم.

۳-۱ حل مدل ثانویه

در این زیر بخش، دو روش برای حل مدل چندهدفه‌ی فوق (مدل ۲) ارایه خواهیم نمود. روش‌های ارایه‌شده شامل روش وزن‌دار شده و روش ε محدودیت است. هرکدام از این مدل‌ها می‌توانند به‌عنوان یک مدل هدف

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.1.6.4]

ثانویه‌ی مستقل در نظر گرفته شود. در ادامه به بیان این دو روش می‌پردازیم.

۳-۱-۱ روش وزن‌دار

روش وزن‌دار شده یک روش پایه‌ای و معروف در مسایل چند هدفه می‌باشد. در این روش با دادن ضریب به هر تابع هدف و جمعِ وزن‌داری از توابع هدف آن را به یک مساله‌ی تک هدفه تبدیل می‌کنیم. با این تکنیک، قادر به حل مدل چند هدفه با توجه به مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی هستیم [۹]. در اینجا ما نیز از این روش برای حل مدل چند هدفه‌ی (۲) استفاده می‌نماییم. درواقع مدل (۲) با استفاده از روش وزن‌دار شده به مدل تک هدفه‌ی زیر تبدیل خواهد شد:

$$Min \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq d}}^{n} w_j \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + v_0}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + \sum_{t=1}^{h} \eta_t \bar{b}_{tj}} \right)$$

$$s.t.$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + v_0}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + \sum_{t=1}^{h} \eta_t \bar{b}_{tj}} \geq 1, \qquad j = 1,\ldots,n, \qquad (۳)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{id} + v_0}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rd} + \sum_{t=1}^{h} \eta_t \bar{b}_{td}} = E^*_{dd},$$

$$u_r \geq 0, \quad v_i \geq 0, \quad \eta_t \geq 0, \; v_0 \; free \quad \forall r,i,t.$$

که در آن $w_j \; (j = 1,\ldots,n; j \neq d)$ وزن متناظر تابع هدف jام برای تبدیل به مساله‌ی تک هدفه می‌باشد. هم‌چنین برای به‌دست آوردن جواب‌های کارا تمام وزن‌های فوق را مثبت در نظر می‌گیریم [۹].

۳-۱-۲ روش ε محدودیت

یک روش دیگر که در ادامه آورده خواهد شد، روش ε محدودیت است که اخیراً در مدل‌های چند هدفه استفاده می‌شود. [۱۰، ۱۱] برای حل مدل چندهدفه‌ی (۲) با استفاده از این روش به‌صورت زیر عمل می‌نمایم:

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.1.6.4]

$$Min \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq d}}^{n} w_j \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + v_0}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + \sum_{t=1}^{h} \eta_t \bar{b}_{tj}}\right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq d}}^{n} \gamma_j s_j^+ + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq d}}^{n} \mu_j s_j^-$$

$$s.t.$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + v_0}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + \sum_{t=1}^{h} \eta_t \bar{b}_{tj}} + s_j^+ - s_j^- \le 1, \qquad j = 1,...,n; j \neq d,$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + v_0}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + \sum_{t=1}^{h} \eta_t \bar{b}_{tj}} \ge 1, \qquad j = 1,...,n,$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{id} + v_0}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rd} + \sum_{t=1}^{h} \eta_t \bar{b}_{td}} = E_{dd}^*,$$

$$s_j^+ \ge 0, s_j^- \ge 0, \qquad j = 1,...,n; j \neq d,$$

$$u_r \ge 0, \quad v_i \ge 0, \quad \eta_t \ge 0, \; v_0 \; free \quad \forall r,i,t. \qquad (۴)$$

که در آن w_j, γ_j, μ_j برای هر $j = 1,...,n$ نامنفی هستند. هم‌چنین فرض می‌کنیم که $w_j + \gamma_j \succ 0$ $(j = 1,...,n; j \neq d)$ باشد. این فرض باعث می‌شود که جواب بهینه‌ی به‌دست‌آمده برای مدل (۴) جواب کارایی مدل (۲) باشد [۱۱]. در مجموعه قیود اول مدل فوق، مقدار ۱ را به‌عنوان کران بالا اهداف در نظر می‌گیریم. هم‌چنین متغیرهای نامنفی s_j^-, s_j^+ $(j = 1,...,n; j \neq d)$ به ترتیب متغیرهای کمکی و مازاد از کران بالای ۱ هستند. مدل طوری طراحی‌شده است که علاوه بر مینیمم کردن جمع وزن‌دار توابع هدف، مجموع متغیرهای کمکی را ماکزیمم و مجموع متغیرهای مازاد را مینیمم کند.

در این زیر بخش دو مدل برای اهداف ثانویه، کارایی متقاطع واحدهای تصمیم‌گیری با خروجی نامطلوب ارایه نمودیم. اکنون اگر $\left(v^*, u^*, \eta^*, v_0^*\right)$ جواب بهینه‌ی مدل ۳ یا ۴ باشد، آنگاه کارایی متقاطع DMU_k با توجه به وزن‌های بهینه‌ی DMU_d عبارت است از:

$$E_{dk} = Min \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i^* x_{ik} + v_0^*}{\sum_{r=1}^{s} u_r^* y_{rk} + \sum_{t=1}^{h} \eta_t^* \bar{b}_{tk}}, \qquad k = 1,...,n; \; k \neq d$$

در نهایت با استفاده از همان روند بخش قبل، ماتریس کارایی متقاطع و شاخص کارایی متقاطع همه‌ی DMU را می‌توانیم به‌دست آوریم.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.1.6.4]

در این بخش به ارایه‌ی روش‌های برای ارزیابی کارایی متقاطع DMU ها با خروجی‌های نامطلوب پرداختیم؛ اما با توجه به اینکه اعتبار هر روش با استفاده از مثال‌هایی در دنیای واقعی نشان داده می‌شود. در بخش بعدی به ارزیابی کارایی ۱۶ استان چین که شامل فاکتور خروجی نامطلوب هستند، خواهیم پرداخت.

٤ مثال عددی

در این بخش به ارزیابی کارایی محیطی استان‌های کشور چین که در مقاله‌ی وی و همکاران [۱۲] آورده شده است، با استفاده از مدل‌های کارایی متقاطع ارایه‌شده در این مقاله می‌پردازیم. ازآنجایی‌که این داده‌ها دارای خروجی نامطلوب هستند از مدل‌های ارایه‌شده در این مقاله استفاده می‌کنیم. این داده‌ها شامل ۱۶ واحد تصمیم‌گیری (استان‌های چین) با دو ورودی و چهار خروجی می‌باشد. خروجی‌ها نیز شامل یک خروجی مطلوب و سه خروجی نامطلوب هستند. ورودی‌ها شامل کل انرژی مصرفی (x_1) و کل جمعیت (x_2) می باشند. هم‌چنین برای خروجی‌ها، GDP به‌عنوان خروجی مطلوب و با y نشان می‌دهیم. خروجی‌های نامطلوب شامل کل فاضلاب صنعتی (b_1)، کل گاز زباله‌ی به وجود آمده (b_2) و هم‌چنین زباله‌ی مواد جامد (b_3) هستند. اطلاعات مربوط به این ۱۶ استان در جدول ۱ زیر آورده شده است. هم‌چنین برای اطلاعات بیش‌تر می‌توان به مقاله‌ی وی و همکاران رجوع کرد [۱۲].

جدول ۱. داده‌های مربوط به ۱۶ استان چین

استان‌ها	x_1	x_2	y	b_1	b_2	b_3
۱	۶۵۷۰	۱۵۰۹۶	۱۲۱۵۳/۰۳	۸۷۱۳	۴۴۰۸	۱۲۴۲/۴
۲	۵۸۷۴	۱۰۴۷۳	۷۵۲۱/۸۵	۱۹۴۴۱	۵۹۸۳	۱۵۱۵/۷
۳	۱۵۵۷۶	۳۰۳۷۸	۷۳۵۸/۳۱	۳۹۷۲۰	۲۳۶۹۳	۱۴۷۴۲/۹
٤	۱۹۱۱۲	۳۸۴۲۹	۱۵۲۱۲/۴۹	۷۵۱۵۹	۲۵۲۱۱	۱۷۲۲۱/۴
۵	۷۶۹۸	۲۴۳۴۹	۷۲۷۸/۷۵	۳۷۵۶۳	۷۱۲۴	۳۹۴۰/۵
٦	۲۳۷۰۹	۶۸۳۷۱	۳۴۴۵۷/۳	۲۵۶۱۶۰	۲۷۴۳۲	۸۰۲۷/۸
۷	۱۵۵۶۷	۴۵۴۷۲	۲۲۹۹۰/۳۵	۲۰۳۴۴۲	۱۸۸۶۰	۳۹۰۹/۷
۸	۸۹۱۶	۳۲۰۹۷	۱۲۲۳۶/۵۳	۱۴۲۷۴۷	۱۰۴۹۷	۶۳۴۸/۹
۹	۱۹۷۵۱	۸۳۹۷۴	۱۹۴۸۰/۴۶	۱۴۰۳۲۵	۲۲۱۸۶	۱۰۷۸۵/۸
۱۰	۱۳۷۰۸	۵۰۸۶۲	۱۲۹۶۱/۱	۹۱۳۲۴	۱۲۵۲۳	۵۵۶۱/۵
۱۱	۱۳۳۳۱	۵۶۸۲۰	۱۱۳۰۵۹/۷	۹۶۳۹۶	۱۰۹۷۳	۵۰۹۲/۸
۱۲	۲۴۶۵۴	۸۴۹۸۱	۳۹۴۸۲/۵۶	۱۸۸۸۴۴	۲۲۶۸۲	۴۷۴۰/۹
۱۳	۷۰۳۰	۲۵۲۸۴	۶۵۳۰/۰۱	۶۵۶۸۴	۱۲۵۸۷	۲۵۵۱/۸
١٤	۱۶۳۲۲	۷۲۴۷۱	۱۴۱۵۱/۲۸	۱۰۵۹۱۰	۱۳۴۱۰	۸۵۹۶/۹
۱۵	۸۰۳۲	۴۰۴۶۰	۶۱۶۹/۷۵	۳۲۳۷۵	۹۴۸۴	۸۶۷۲/۸
١٦	۸۰۴۴	۳۳۵۰۴	۸۱۶۹/۸	۴۹۱۳۷	۱۱۰۳۲	۵۵۴۶/۷

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.1.6.4]

اکنون با استفاده از مدل‌های کارایی متقاطع ارایه‌شده در این مقاله به ارزیابی کارایی این ۱۶ استان چین می‌پردازیم. درواقع با استفاده از مدل‌های ۳ و ۴ وزن‌های بهینه‌ی مربوط به DMU ها را به‌دست می‌آوریم. سپس ماتریس کارایی متقاطع را تشکیل داده و درنهایت شاخص کارایی را برای هر DMU محاسبه می‌کنیم. برای اجرای مدل‌ها و به‌دست آوردن کارایی واحدهای تصمیم‌گیری از نرم‌افزار لینگو ۱۱ استفاده می‌کنیم. در جدول (۲) شاخص‌های کارایی متقاطع مربوط به مدل‌های ۳ و ۴ آورده شده است. این شاخص‌های کارایی به ترتیب در ستون سوم و چهارم جدول (۲) آورده شد. برای مقایسه‌ی مدل‌های کارایی متقاطع با مدل‌های سنتی، در ستون دوم نیز نمره‌ی کارایی به‌دست‌آمده برای واحدهای تصمیم‌گیری با استفاده از مدل سیفورد و ژو [۵] آورده شده است.

جدول ۲. شاخص کارایی متقاطع و رتبه‌بندی مربوط به ۱۶ استان چین با استفاده از مدل‌های ارایه‌شده

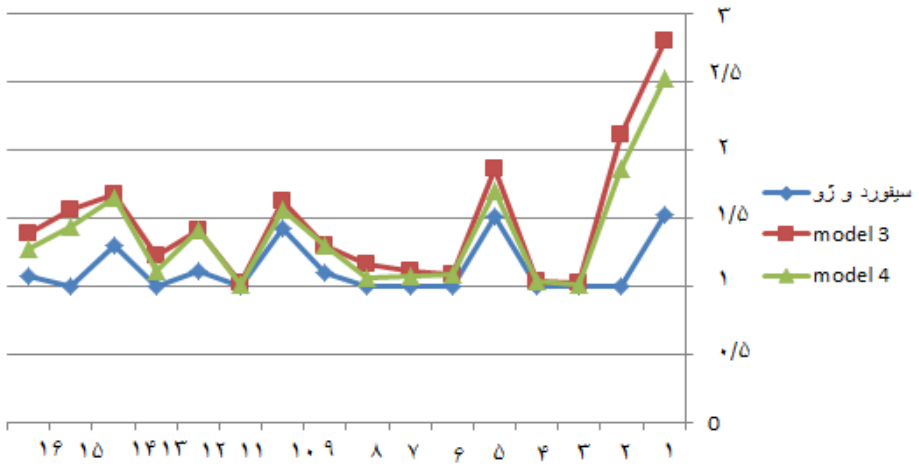
استان‌ها	مدل سیفورد و ژو		مدل ۳		مدل ۴	
۱	۱/۵۳	(۱۶)	۲/۸۰	(۱۶)	۲/۵۳	(۱۶)
۲	۱	(۱)	۲/۱۱	(۱۵)	۱/۸۶	(۱۵)
۳	۱	(۱)	۱/۰۳۱	(۱)	۱/۰۲۰	(۱)
۴	۱	(۱)	۱/۰۴	(۳)	۱/۰۴	(۳)
۵	۱/۵۱	(۱۵)	۱/۸۷	(۱۴)	۱/۷۰	(۱۴)
۶	۱	(۱)	۱/۰۹	(۴)	۱/۰۹	(۶)
۷	۱	(۱)	۱/۱۲	(۵)	۱/۰۸	(۵)
۸	۱	(۱)	۱/۱۶	(۶)	۱/۰۷	(۴)
۹	۱/۱	(۱۱)	۱/۳۰	(۸)	۱/۳۰	(۹)
۱۰	۱/۴۳	(۱۴)	۱/۶۳	(۱۲)	۱/۵۷	(۱۲)
۱۱	۱	(۱)	۱/۰۳۳	(۲)	۱/۰۲۳	(۲)
۱۲	۱/۱۱	(۱۲)	۱/۴۲	(۱۰)	۱/۴۲	(۱۰)
۱۳	۱	(۱)	۱/۲۳	(۷)	۱/۱۲	(۷)
۱۴	۱/۳	(۱۳)	۱/۶۸	(۱۳)	۱/۶۵	(۱۳)
۱۵	۱	(۱)	۱/۵۶	(۱۱)	۱/۴۴	(۱۱)
۱۶	۱/۰۸	(۱۰)	۱/۳۹	(۹)	۱/۲۸	(۸)

شاخص کارایی متقاطع می‌تواند مبنایی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری باشد، به این صورت که هر چه شاخص به ۱ نزدیک‌تر باشد، واحد تصمیم‌گیری کاراتر و بیش‌تر از یک نشان از ناکارایی بیش‌تر است. با این دیدگاه به رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری با استفاده از این مدل‌ها می‌پردازیم؛ بنابراین در جدول (۲) علاوه بر شاخص‌های کارایی هر واحد تصمیم‌گیری رتبه‌ی آن در داخل پرانتز آورده شده است. همان‌طور که در جدول می‌بینیم، نمی‌توان با استفاده از مدل سیفورد و ژو استان‌های چین را رتبه‌بندی نمود؛ زیرا ۹ استان کارا می‌باشند؛ اما با استفاده از مدل‌های ۳ و ۴ ارایه‌شده در این مقاله به‌راحتی می‌توانیم استان‌های چین را رتبه‌بندی کنیم.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.1.6.4]

برای مقایسه‌ی دو روش ارایه‌شده در این مقاله (مدل‌های ۳ و ۴) و مدل سیفورد و ژو [۵]، در شکل ۱ زیر شاخص کارایی به‌دست‌آمده برای هر واحد تصمیم‌گیری با استفاده از سه مدل آورده شده است.



شکل ۱. اندازه‌ی شاخص کارایی برای ۱۶ استان چین با استفاده از مدل ۳، ۴ و سیفورد و ژو

همان‌طور که از شکل فوق می‌بینیم، در تمام موارد مدل (۴) مقدار شاخص کارایی کم‌تر یا مساوی نسبت به مدل (۳) دارد؛ یعنی کارایی واحدهای تصمیم‌گیری در مدل (۴) نزدیک‌تر به ۱ است و این می‌تواند برتری این روش را در دست یافتن به ماکزیمم نمودن کارایی واحدهای تصمیم‌گیری که جز اهداف مدل ثانویه (۲) بود، نشان دهد. پس با توجه به این مثال مدل (۴) نسبت به مدل (۳) برتری دارد.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله با توجه به این‌که در میان خروجی‌های یک واحد تصمیم‌گیری ممکن است خروجی‌های نامطلوبی مانند گازهای گلخانه‌ای موجود باشد، به ارایه‌ی روشی برای کارایی متقاطع واحدهای تصمیم‌گیری با خروجی نامطلوب پرداختیم. به این صورت که ابتدا ماتریس کارایی متقاطع را با استفاده از مدل مضربی با خروجی نامطلوب ساختیم؛ اما با توجه به جواب بهینه‌ی چندگانه‌ی این مدل، یک هدف ثانویه برای بهبود ماتریس کارایی متقاطع برحسب ماکزیمم کردن کارایی واحدهای دیگر ارایه نمودیم که حاصل کار، یک مدل چند هدفه است و با دو روش در حوزه‌ی برنامه‌ریزی چند هدفه آن را تبدیل به یک مساله‌ی تک هدفه کردیم. درنهایت با استفاده از این روش‌ها به ارزیابی کارایی ۱۶ استان چین پرداختیم. در حوزه‌ی چند هدفه، روش‌های دیگری برای تک هدفه کردن و حل مسایل چند هدفه وجود دارد. می‌توان از این روش‌ها برای حل مدل (۲) استفاده و روش‌های جدیدی ارایه نمود. در مدل (۲)، از رویکرد ماکزیمم کردن کارایی برای *DMU* ها استفاده کردیم. هم‌چنین می‌توان از رویکرد مینیمم‌سازی استفاده کرد و یا با در نظر گرفتن ماکزیمم و مینیمم کارایی از مفهوم کارایی بازه‌ای استفاده نمود؛ که این مطالب می‌تواند برای کارهای بعدی در نظر گرفته شود.

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.1.6.4]

منابع

[۸] کاظمی‌متین، ر.، (۱۳۹۰). روش‌های ناپارامتری مدل‌بندی خروجی‌های نامطلوب در DEA: رویکرد استفاده از اصل دسترسی‌پذیری ضعیف. مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، ۳(۳۰)،۵۳-۶۹.

[1] Sexton, T. R., Silkman, R. H., Hogan, A. J., (1986). Data envelopment analysis: Critique and extensions. In: Silkman, R.H. (Ed.), Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis, Jossey-Bass, San Francisco, 32, 73–105.

[2] Anderson, T. R., Hollingsworth, K. B., Inman, L. B., (2002). The fixed weighting nature of a cross-evaluation model. Journal of Productivity Analysis, 18(1), 249–255.

[3] Doyle, J., Green, R., (1994). Efficiency and cross efficiency in DEA: Derivations, meanings and the uses. Journal of the Operational Research Society, 45(5), 567 578.

[4] Fare, R., Grosskopf, S., Lovell, C. A. K., (1989). Multilateral productivity comparisons when some outputs are undesirable: a nonparametric approach. The Review of Economics and Statistics, 71, 90–98.

[5] Seiford, L. M., Zhu, J., (2002). Modeling undesirable factors in efficiency evaluation. European Journal of Operational Research, 142, 16–20.

[6] Hailu, A., Veeman, T., (2001). Non-parametric productivity analysis with undesirable outputs: an application to Canadian pulp and paper industry. American Journal of Agricultural Economics, 83, 605–616.

[7] Tone, K., (2004). dealing with undesirable outputs in DEA: a slacks-based measure (SBM) approach. Presentation at NAPW III, Toronto.

[9] Ehrgott, M., (2000). Multicriteria Optimization. volume 491 of LectureNotes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag, Berlin.

[10] Ehrgott, M., Ruzika, S., (2008). Improved constraint method for multiobjective programming. Journal of Optimization Theory and Applications, 10, 375-396.

[11] Rastegar, N., Khorram, E., (2014). A combined scalarizing method for multiobjective programming. European Journal of Operational Research, 236, 229–237

[12] Wu, C., *et al*., (2012). A stochastic DEA model considering undesirable output with weak disposability, Mathematical and Computer Modelling. doi:10.1016/j.mcm

[Downloaded from mail.jorlu.ir on 2026-11-29]

[DOR: 20.1001.1.22517286.2016.13.1.6.4]