

## بهبود قدرت تمایز تکنیک DEA با استفاده از ارزیابی برشی

علیرضا امیر تیموری<sup>۱\*</sup>، سهراب کردرستمی<sup>۲</sup>، لیلا خوش اندام<sup>۳</sup>، پیمان علیدوست ذوقی<sup>۴</sup>

۱- دانشگاه آزاد اسلامی واحد رشت، گروه ریاضی

۲- دانشگاه آزاد اسلامی واحد لاهیجان، گروه ریاضی

۳- دانشگاه آزاد اسلامی واحد لشت نشاء- زیباکنار، گروه ریاضی

۴- دانشگاه آزاد اسلامی واحد بندرانزلی

رسید مقاله: ۲۷ مرداد ۱۳۸۹

پذیرش مقاله: ۱۶ دی ۱۳۸۹

### چکیده

ارزیابی برشی یک تعمیم قوی از تکنیک تحلیل پوششی داده‌هاست به طوری که نه تنها یک رتبه‌بندی برای واحدهای تصمیم‌گیرنده فراهم می‌کند؛ بلکه الگوهای وزنی نامتناسب را نیز حذف می‌نماید. عاملی که ممکن است در استفاده از ارزیابی برشی مشکل ساز شود. وجود وزن‌های بهینه چندگانه می‌باشد؛ در نتیجه برای بهبود روش ارزیابی برشی، از توابع هدف ثانویه استفاده می‌شود. در این مقاله، یک روش، توسط دو تابع هدف ثانویه متفاوت معرفی خواهد شد و با حل این مدل‌ها، یک الگوی وزنی مناسب برای محاسبه ارزیابی برشی و در نهایت رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری فراهم خواهد گردید.

**کلمات کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها، رتبه‌بندی، ارزیابی برشی، توابع هدف ثانویه.

### ۱ مقدمه

یکی از شاخه‌های کاربردی تحقیق در عملیات، تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد که جهت ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری با چند ورودی و چند خروجی به کار می‌رود. چارنز و همکاران [۱] نخستین بار با تعمیم تحقیق فارل [۲] تکنیک DEA را معرفی کردند. DEA به هر واحد کارآ اندازه کارآیی یک و به هر واحد ناکارآ اندازه کارآیی کمتر از یک تخصیص می‌دهد. در اغلب کاربردهای عملی، بیش از یک واحد، کارآ ارزیابی می‌شود و از این رو ایجاد تمایز و رتبه‌بندی این واحدها مبحث جالبی در حیطه تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد. یکی از روش‌های رتبه‌بندی واحدها، روش ارزیابی برشی است. سکستون و همکاران [۳]. ارزیابی برشی دارای دو مزیت عمده می‌باشد: (۱) یک رتبه‌بندی یکتا از واحدها فراهم و (۲) الگوهای وزنی نامتناسب را حذف می‌کند. اندرسن و همکاران [۳]. رتبه کارآیی برشی به دست آمده از مدل‌های DEA معمولاً یکتا نیستند و این

\* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: ateimoori@iaurasht.ac.ir

ناشی از چندگانگی وزن‌های بهینه در DEA می‌باشد که ممکن است باعث بروز مشکلاتی شود. سکستون و همکاران و دوایل و گرین [۴] پیشنهاد کردند که از اهداف ثانویه استفاده شود. برای این منظور آن‌ها دو مدل Max و Min را مطرح نمودند. در مدل اول، علاوه بر این که کارآیی واحد تحت بررسی را ماکسیمم می‌کند؛ میانگین کارآیی واحدهای دیگر را نیز ماکسیمم می‌نماید. در مدل دوم، علاوه بر این که کارآیی واحد تحت بررسی را مینیمم می‌کند؛ میانگین کارآیی واحدهای دیگر را ماکسیمم می‌نماید. در سال ۲۰۰۸ کوک و همکاران [۵]، با معرفی سه مدل با توابع هدف متفاوت، به صورت: (۱) مینیمم کردن انحراف کل از نقطه ایده‌آل، (۲) مینیمم کردن ماکسیمم انحرافات، (۳) مینیمم کردن میانگین قدرمطلق انحرافات، تعمیمی بر مدل دوایل و گرین ارائه کردند.

در این مقاله به منظور بهبود ارزیابی برشی، و در نهایت رسیدن به رتبه‌بندی، دو مدل با توابع هدف متفاوت ارائه می‌شود و سپس با ارائه یک مثال، نتایج حاصل بررسی خواهد شد.

## ۲ ارزیابی برشی

فرض کنیم مجموعه‌ای از  $n$  واحد تصمیم‌گیری جهت ارزیابی وجود دارند. هر  $DMU_j$ ،  $s$  خروجی متفاوت را به کمک  $m$  ورودی متفاوت تولید می‌کند.  $i$  امین ورودی و  $r$  امین خروجی  $DMU_j$ ،  $j = 1, \dots, n$  به ترتیب با  $x_{ij}$ ،  $i = 1, \dots, m$  و  $y_{rj}$ ،  $r = 1, \dots, s$  نشان داده می‌شوند. ارزیابی برشی اغلب به صورت یک فرآیند دو مرحله‌ای انجام می‌شود. در مرحله اول با استفاده از یکی از مدل‌های استاندارد DEA مانند مدل مضربی (CCR)، برای هر  $DMU$  یک بردار وزنی به دست می‌آید. برای هر  $DMU$  تحت ارزیابی میزان کارآیی،  $E_{pp}^*$ ، به دست آمده از مدل CCR به وسیله مساله‌ی بهینه‌سازی زیر داده می‌شود:

$$E_{pp}^* = \max E_{pp} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rp} y_{rp}}{\sum_{i=1}^m v_{ip} x_{ip}} \quad s.t. \quad (1)$$

$$E_{pj} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rp} y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ip} x_{ij}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_{rp} \geq 0, \quad v_{ip} \geq 0, \quad \text{for all } i, j.$$

که در آن  $u_{rp}$  و  $v_{ip}$  به ترتیب اوزان مربوط به  $i$  امین ورودی و  $r$  امین خروجی می‌باشند. فرض کنیم  $u_{ip}^*$ ،  $v_{ip}^*$  جواب بهینه مدل (۱) باشند. اندازه برشی  $DMU_j$  با استفاده از وزن‌های بهینه مدل (۱) در ارزیابی  $DMU_p$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_{pj} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rp}^* y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ip}^* x_{ij}}, \quad (j = 1 \dots n) \quad (2)$$

برای  $DMU_j$  ( $j = 1 \dots n$ ) میانگین تمام  $E_{pj}$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ) به عنوان میزان کارآیی ارزیابی برشی برای  $DMU_j$  معرفی می‌شود. بنابراین کارآیی ارزیابی برشی  $DMU_j$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{E}_j = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n E_{pj} \quad (3)$$

### ۳ ارزیابی برشی مبتنی بر هدف ثانویه

در روشی که در ذیل توصیف خواهد شد، ابتدا به کمک یکی از مدل‌های اساسی  $DEA$ ، مثلاً مدل  $CCR$ ، اندازه کارآیی  $DMU$  ها اندازه‌گیری می‌شود و به کمک آن، با حفظ شرایط کارآیی واحدها، طی یک فرآیند دو مرحله‌ای، اندازه برشی واحدها محاسبه می‌شود. مدل مضربی  $CCR$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} e_p = \text{Max} \quad & \sum_{r=1}^s u_{rp} y_{rp} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m v_{ip} x_{ip} = 1, \\ & \sum_{r=1}^s u_{rp} y_{rp} - \sum_{i=1}^m v_{ip} x_{ip} = 0, \\ & u_{rp} \geq 0, v_{ip} \geq 0 \quad \text{for all } i, r. \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن  $DMU_p$  تحت ارزیابی است. فرض کنیم  $e_p^*$  مقدار بهینه مدل (۴) باشد. در مرحله‌ی بعد، به دنبال بردار وزنی هستیم که اولاً شرایط کارآیی واحد تصمیم‌گیری تحت ارزیابی،  $DMU_p$ ، را حفظ کند، ثانیاً بقیه واحدهای تصمیم‌گیری را تا حد ممکن به سطح کارآیی ایده آل نزدیک کند، برای این منظور تلاش می‌کنیم فاصله  $\sum_{r=1}^s u_{rp} y_{rp} - \sum_{i=1}^m v_{ip} x_{ip}$  را تا حد ممکن کم کنیم. مساله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad \rho \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{i=1}^m v_i x_{ip} = 1, \\
 & \rho \leq \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rp} = e_p^*, \\
 & u_{rp} \geq 0, \quad v_{ip} \geq 0, \quad \text{for all } i, r.
 \end{aligned} \tag{5}$$

در مدل (5) با معرفی  $\rho$  به عنوان یک کران پایین برای  $\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}$ ، هدف کاهش میزان پراکندگی زوج مرتب‌های  $(\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}, \sum_{r=1}^s u_r y_{rj})$  در فضای مجموع توزین شده خروجی‌ها و مجموع توزین شده ورودی‌ها می‌باشد. محدودیت سوم در مدل (5) شرایط کارآیی  $DMU_p$  را حفظ می‌کند. در مدل (5)، احتمال صفر شدن وزن‌ها وجود دارد. در مرحله سوم به منظور جلوگیری از صفر شدن وزن‌ها، کران پایین وزن‌های  $v_{ip}$  و  $u_{rp}$  را ماکزیمم می‌کنیم. فرض کنیم  $\rho^*$  مقدار بهینه مساله (5) باشد. برای نیل به هدف، مساله زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad \phi \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{i=1}^m v_i x_{ip} = 1, \\
 & \rho^* \leq \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \\
 & \sum_{r=1}^s u_r y_{rp} = e_p^*, \\
 & \phi \leq u_{rp}, \quad \phi \leq v_{ip}, \quad \text{for all } i, r.
 \end{aligned} \tag{6}$$

فرض کنیم  $u_{rp}^*, v_{ip}^*, i=1, \dots, m$  جواب بهینه مدل (6) باشد. اندازه برشی  $DMU_j$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e_j^{(p)} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rp} y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ip} x_{ij}}, \quad p=1, \dots, n, \quad j=1, 2, \dots, n. \tag{7}$$

$n^2$  درایه  $e_j^{(p)}$  ها ماتریس برشی مربعی  $c = [e_j^{(p)}]$  را به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$C = \begin{bmatrix} e_1^{(1)} & e_2^{(1)} & \dots & e_n^{(1)} \\ e_1^{(2)} & e_2^{(2)} & \dots & e_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_1^{(n)} & e_2^{(n)} & \dots & e_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

میانگین هر ستون ماتریس فوق اندازه کارایی برشی هر واحد تصمیم گیری را به صورت زیر تعریف می کند:

$$\bar{e}_j = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n e_j^{(p)} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

برای جلوگیری از صفر شدن وزن ها، می توانیم مجموع وزن ها را با حفظ شرایط بهینگی بیشینه کنیم. برای این منظور مساله برنامه ریزی خطی زیر را حل می کنیم:

$$\begin{aligned} &Max \quad \sum_{r=1}^s u_r + \sum_{i=1}^m v_i \\ &st. \\ &\sum_{i=1}^m v_i x_{ip} = 1, \\ &\rho^* \leq \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \\ &\sum_{r=1}^s u_r y_{rp} = e_p^*, \\ &u_{rp} \geq 0, \quad v_{ip} \geq 0, \quad \text{for all } i, r. \end{aligned} \quad (9)$$

#### ۴ مثال عددی

برای توصیف فرآیند محاسباتی روش معرفی شده، آن را روی یک مجموعه از داده ها اجرا می کنیم؛ هجده واحد تصمیم گیری با دو ورودی و سه خروجی را در نظر می گیریم. داده های ورودی و خروجی در جدول (۱) خلاصه شده است.

جدول ۱. ورودی‌ها و خروجی‌های مثال اول

| DMU | $x_1$   | $x_2$  | $y_1$   | $y_2$  | $y_3$ |
|-----|---------|--------|---------|--------|-------|
| ۱   | ۲۸۷۴/۸  | ۱۹۷۳۸  | ۱۶۰/۸۹  | ۸۰۸۰۰  | ۵۰۹۲  |
| ۲   | ۹۴۶/۳   | ۶۹۱    | ۲۱/۱۴   | ۱۸۱۷۲  | ۶۵۶۳  |
| ۳   | ۶۸۵۴/۰  | ۴۳۰۲۴  | ۳۷۵/۲۵  | ۱۴۴۵۳۰ | ۲۴۳۷  |
| ۴   | ۲۳۰۵/۱  | ۱۰۸۱۵  | ۱۷۶/۶۸  | ۷۰۳۱۸  | ۳۱۴۵  |
| ۵   | ۲۳۰۵/۱  | ۲۰۹۹   | ۱۰۲/۱۲  | ۵۵۴۱۹  | ۱۲۲۵  |
| ۶   | ۱۰۱۰/۳  | ۷۵۷    | ۹۵/۱۷   | ۲۷۴۲۲  | ۲۴۶   |
| ۷   | ۲۸۲/۳   | ۱۱۶۹۰۰ | ۱۰۲۹/۰۹ | ۳۵۱۳۹۰ | ۱۴۶۰۴ |
| ۸   | ۱۷۴۷۸/۶ | ۲۰۲۴   | ۳۰/۰۷   | ۲۳۵۵۰  | ۱۱۲۶  |
| ۹   | ۶۶۱/۸   | ۳۲۱۸   | ۱۶۰/۵۸  | ۵۹۴۰۶  | ۲۲۳۰  |
| ۱۰  | ۱۵۴۴/۲  | ۵۷۴    | ۵۳/۶۹   | ۴۷۵۰۴  | ۴۳۰   |
| ۱۱  | ۴۲۸/۴   | ۲۹۸۴۲  | ۲۵۸/۰۹  | ۱۵۱۳۵۶ | ۴۶۴۹  |
| ۱۲  | ۶۹۷/۷   | ۳۳۹۴   | ۳۸/۰۲   | ۴۵۳۳۶  | ۱۵۵۵  |
| ۱۳  | ۱۰۶/۴   | ۳۶۷    | ۷/۰۷    | ۸۲۳۶   | ۱۲۱   |
| ۱۴  | ۴۵۳۹/۳  | ۴۵۸۰۹  | ۱۱۶/۶۴  | ۵۶۱۳۵  | ۹۵۶   |
| ۱۵  | ۹۵۷/۸   | ۱۶۹۴۷  | ۲۹/۲۰   | ۱۷۵۵۴  | ۲۳۱   |
| ۱۶  | ۱۲۰۹/۲  | ۱۵۷۴۱  | ۶۵/۳۶   | ۶۲۳۴۱  | ۶۱۸   |
| ۱۷  | ۹۷۲/۴   | ۲۳۸۲۲  | ۴۵/۵۲   | ۲۵۲۰۳  | ۵۱۳   |
| ۱۸  | ۲۱۹۲/۰  | ۱۰۹۴۳  | ۲۵/۲۴   | ۴۰۲۶۷  | ۸۹۵   |

با اجرای مدل (۴) مشخص شد سه واحد تصمیم‌گیری کارآ شدند. اندازه کارآیی واحدها در ستون دوم جدول (۲) گنجانده شده است. به کمک این مقادیر کارآیی و اجرای مدل (۵)، مقادیر بهینه  $\rho^*$  ها در ستون سوم جدول (۲) آمده است.

جدول ۲. میزان کارآیی واحدها و کران پایین تفاضل مجموع توزین شده ورودی‌ها و خروجی‌ها

| DMU | $e_p^*$ | $\rho^*$ |
|-----|---------|----------|
| ۱   | ۰/۴۶۹۰  | -۴/۲۱۵۷  |
| ۲   | ۱/۰۰۰۰  | -۱۱/۸۸۰۷ |
| ۳   | ۰/۲۷۸۲  | -۱/۶۴۲۹  |
| ۴   | ۰/۵۰۲۲  | -۴/۸۸۱۶  |
| ۵   | ۰/۶۳۱۰  | -۱۱/۹۹۹۵ |
| ۶   | ۱/۰۰۰۰  | -۳۹/۷۶۸۴ |
| ۷   | ۰/۳۵۷۹  | -۰/۶۴۲۱  |
| ۸   | ۰/۴۹۵۹  | -۱۸/۳۱۸۳ |
| ۹   | ۰/۶۵۷۶  | -۲۴/۱۴۹۳ |

| DMU | $e_p^*$ | $\rho^*$  |
|-----|---------|-----------|
| ۱۰  | ۱/۰۰۰۰  | -۲۸/۳۰۷۱  |
| ۱۱  | ۰/۳۰۰۹  | -۱/۹۴۶۵   |
| ۱۲  | ۰/۷۸۶۶  | -۱۸/۵۰۷۶  |
| ۱۳  | ۰/۷۵۱۴  | -۱۲۱/۳۶۱۳ |
| ۱۴  | ۰/۱۳۸۱  | -۲/۶۷۰۲   |
| ۱۵  | ۰/۱۸۶۷  | -۱۲/۶۵۱۷  |
| ۱۶  | ۰/۴۷۰۳  | -۱۰/۶۷۸۰  |
| ۱۷  | ۰/۳۰۵۹  | -۱۱/۵۵۴۰  |
| ۱۸  | ۰/۱۹۵۲  | -۵/۸۹۰۸   |

در مرحله آخر برای یافتن وزن‌های بهینه، مدل (۶) را حل کرده؛ و با استفاده از این وزن ارزیابی برشی را محاسبه می‌کنیم و در نهایت رتبه‌بندی واحدها را انجام می‌دهیم. نتایج حاصل از این محاسبات در جدول (۳) آورده شده است.

جدول ۳. میزان ارزیابی برشی و رتبه‌بندی واحدها توسط اوزان حاصل از مدل (۸)

| DMU | ارزیابی برشی | رتبه |
|-----|--------------|------|
| ۱   | ۰/۳۹۴۴       | ۱۰   |
| ۲   | ۰/۹۱۸۵       | ۲    |
| ۳   | ۰/۲۱۵۳       | ۱۵   |
| ۴   | ۰/۳۹۸۹       | ۹    |
| ۵   | ۰/۵۷۷۷       | ۶    |
| ۶   | ۰/۹۱۳۳       | ۳    |
| ۷   | ۰/۲۶۲۹       | ۱۲   |
| ۸   | ۰/۴۲۰۳       | ۸    |
| ۹   | ۰/۵۲۳۳       | ۷    |
| ۱۰  | ۰/۹۲۸۴       | ۱    |
| ۱۱  | ۰/۲۵۲۹       | ۱۳   |
| ۱۲  | ۰/۶۱۰۹       | ۴    |
| ۱۳  | ۰/۵۹۵۸       | ۵    |
| ۱۴  | ۰/۱۱۲۹       | ۱۸   |
| ۱۵  | ۰/۱۴۴۱       | ۱۷   |
| ۱۶  | ۰/۳۵۲۷       | ۱۱   |
| ۱۷  | ۰/۲۳۳۶       | ۱۴   |
| ۱۸  | ۰/۱۴۴۴       | ۱۶   |

برای به‌دست آوردن کارآیی ارزیابی برشی از طریق وزن‌های بهینه مدل (۹)، مجدداً مراحل فوق را با استفاده از این وزن‌ها محاسبه می‌کنیم. نتایج در جدول (۴) آورده شده است.

**جدول ۴.** میزان ارزیابی برشی و رتبه بندی واحد ها توسط اوزان حاصل از مدل (۹)

| رتبه | ارزیابی برشی | DMU |
|------|--------------|-----|
| ۱۰   | ۰/۳۹۷۸       | ۱   |
| ۱    | ۰/۹۴۸۶       | ۲   |
| ۱۵   | ۰/۲۲۲۵       | ۳   |
| ۹    | ۰/۴۱۲۶       | ۴   |
| ۶    | ۰/۵۹۰۲       | ۵   |
| ۲    | ۰/۹۴۸۵       | ۶   |
| ۱۲   | ۰/۲۷۳۹       | ۷   |
| ۸    | ۰/۴۱۷۰       | ۸   |
| ۷    | ۰/۵۵۷۵       | ۹   |
| ۳    | ۰/۸۹۱۷       | ۱۰  |
| ۱۴   | ۰/۲۵۴۲       | ۱۱  |
| ۴    | ۰/۵۹۱۰       | ۱۲  |
| ۵    | ۰/۵۶۳۴       | ۱۳  |
| ۱۸   | ۰/۱۱۵۰       | ۱۴  |
| ۱۶   | ۰/۱۴۷۰       | ۱۵  |
| ۱۱   | ۰/۳۴۶۳       | ۱۶  |
| ۱۳   | ۰/۲۴۵۹       | ۱۷  |
| ۱۷   | ۰/۱۳۶۵       | ۱۸  |

#### ۴ نتیجه گیری

در این مقاله با تعمیم روش های دوپل و گرین (۱۹۹۴) و کوک و همکاران (۲۰۰۸)، از طریق معرفی یک تابع هدف ثانویه، به کارآیی برشی نهایی برای هر DMU دست پیدا کردیم. مدل های پیشنهادی به همراه توابع هدف مختلف شان، در شرایط مختلف به کار برده می شوند.

#### منابع

- [1] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the Efficiency of Decision Making Units. European Journal of Operational Research, 2, 429-4.
- [2] Farrell, M. J., (1957). The Measurement of productive Efficiency. Jurnal of the Royal Statistical Societ, 120, 253-281.
- [3] Sexton, T. R., Silkman, R. H., Hogan, A. J., (1986). Data envelopment analysis: critique and extention. In: Silkman, R.H. (Ed), Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis, vol. 32 Jossey-Bass, San Francisco, 32, 73-105.
- [4] Doyle, J., Green, R., (1994). Efficiency and cross efficiency in DEA: Derivations, meaning and the uses. Journal of the Operational Research Society, 45 (5), 567-578.



- [5] Liang Liang, J. W., Wade, D. C., Joe, Z., (2008). Alternative secondary goals in DEA cross efficiency evaluation. Int. J. Production Economics, 113 1025-1030.
- [6] Anderson, T. R., Hollingsworth, K. B., Inman, L. B., (2002). The fixed weighting nature of cross-evaluation model. Jouornal of Productivity Analysis, 18(1) , 249-255