

## کنترل موجودی، قیمت گذاری و برنامه ریزی تولید برای یک تولید کننده با اقدام فاسد شدنی وابسته به زمان

حامد پورعلیخانی<sup>۱\*</sup>، علیمحمد کیمیاگری<sup>۲</sup>، محسن کیوانلو<sup>۳</sup>

۱- کارشناس ارشد دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده مهندسی صنایع، تهران، ایران

۲- دانشیار دانشگاه صنعتی امیرکبیر، گروه مهندسی صنایع، تهران، ایران

۳- دانشجوی دکتری دانشگاه صنعتی امیرکبیر، گروه مهندسی صنایع، تهران، ایران

رسید مقاله: ۴ بهمن ۱۳۹۱

پذیرش مقاله: ۱ تیر ۱۳۹۲

### چکیده

در این مقاله یک مدل موجودی تولید کننده برای اقدام فاسد شدنی در شرایطی که نرخ فاسد شدن وابسته به زمان و از توزیع دو پارامتری وایبول تبعیت می کند؛ توسعه داده شده است. هدف این مقاله ابتدا یافتن قیمت بهینه فروش تولید کننده و سپس زمان بهینه تولید و تعداد دوره های تحویل کالا برای تولید کننده با ملاحظه ی بیشینه کردن سود تولید کننده می باشد. یک الگوریتم ابتکاری برای تعیین تصمیمات بهینه ارایه شده و با توجه به ادبیات موضوع مثال عددی برای صحت الگوریتم حل طراحی گردیده است. در نهایت، جهت دستیابی به نتایج مدیریتی آنالیز حساسیتی بر جواب بهینه با تغییر پارامترهای هزینه ای و فاسد شدنی انجام شده است.

**کلمات کلیدی:** کنترل موجودی، قیمت گذاری، برنامه ریزی تولید، اقدام فاسد شدنی.

### ۱ مقدمه

همان طور که واضح است یکی از هزینه هایی که هریک از اجزای زنجیره تامین به منظور پاسخ گویی به نیازهای اجزای پایین دست خود متحمل می شوند؛ هزینه های موجودی می باشد که از جمله مهم ترین هزینه های یک زنجیره تامین به شمار می آید. در میان زنجیره های تامین متداول زنجیره های تامینی که کالاهایی که در طی آن حرکت می کنند با گذشت زمان فاسد می شوند از حساسیت بیشتری در هزینه های موجودی برخوردار هستند. با کاهش هزینه های زنجیره، قیمت تمام شده کالا یا خدمت کاهش یافته در حقیقت شانس به دست آوردن سهم بیشتری از بازار فراهم می گردد که به نوبه خود منجر به افزایش سودآوری هریک از اجزای زنجیره تامین خواهد گردید. اگر هر جزء زنجیره در صدد کاهش هزینه خود و در حقیقت افزایش سود خویش بدون توجه به سایر اجزا زنجیره باشد؛ نتیجه حاصل افزایش چشمگیر در هزینه های کل زنجیره و در نهایت حذف کلیه

\* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: hamed\_pouralikhani@aut.ac.ir

اجزای زنجیره در بین رقبا خواهد بود. همان‌طور که گفته شد یکی از آثار مثبت کاهش هزینه‌های موجودی زنجیره تامین یک کالا، کاهش قیمت تمام شده کالای مذکور و در نتیجه افزایش رضایت مشتریان، ایجاد سود بیشتر برای هریک از اجزای زنجیره در اثر دستیابی به سهم بیشتر بازار و در نهایت ایجاد پویایی در زنجیره تامین در جهت غلبه بر سایر رقبا می‌باشد. بنابراین در نهایت با انجام چنین تحقیقی نه تنها یک مدل مناسب برای سفارش‌دهی اجزای زنجیره ارایه می‌شود؛ بلکه دامنه سودمندی آن می‌تواند شامل مشتری نهایی و کلیه اجزای زنجیره تامین گردد. در این میان زنجیره‌هایی که محصول‌شان فاسد شدنی است از حساسیت بیشتری برخوردار هستند؛ از این جهت که در این زنجیره‌ها علاوه بر هزینه‌های رایج موجودی هزینه مربوط به فاسد شدن نیز وجود دارد که منجر به تولید بیشتر از تقاضا و تحمیل هزینه می‌شود. استفاده از سیاست‌هایی که بتواند زنجیره تامین را به صورتی کارا هماهنگ نماید؛ همواره مورد توجه متخصصان هم در دانشگاه‌ها و هم در محیط‌های کسب و کار بوده است.

بررسی مدل‌های موجودی در شبکه زنجیره تامین سابقه طولانی دارد. اما لحاظ نمودن سیاست‌های برنامه‌ریزی تولید و موجودی و قیمت‌گذاری به صورت یکپارچه کمتر مورد توجه محققین قرار گرفته است. در واقع در این تحقیق بخش‌هایی از ادبیات موضوع که به دلیل پیچیدگی، کمتر به آن پرداخته شده به طور توانمان بررسی شده‌اند عبارتند از: فاسد شدنی بودن کالا به نسبت زمان، در نظر گرفتن تامین‌کننده به صورت تولیدکننده و ادغام سیاست‌های موجودی، قیمت‌گذاری و برنامه‌ریزی تولید. لذا در نظر گرفتن این سه سیاست به طور یکپارچه کمک شایانی به ارایه مدل‌های کارا تر که نیاز دنیای واقعی می‌باشد؛ ضروری به نظر می‌رسد. ادامه مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. در بخش دوم، ادبیات موضوع شامل مفاهیم کالاهای فاسدشدنی و مدل‌های موجودی مرتبط و مرور بر مدل‌های تولید استفاده شده برای کالاهای فاسد شدنی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در بخش سوم به تشریح مساله، معرفی فرضیات و محدودیت‌های مساله پرداخته شده. در بخش چهارم مدل تولیدکننده ارایه گردیده و در بخش پنجم الگوریتم حل بهینه تشریح شده است. نتایج حاصل از اجرای مدل و به کارگیری الگوریتم برای یک مثال با آنالیز حساسیت کامل روی پارامترهای مدل در بخش ششم تحلیل گردیده و در نهایت در هفتم نتیجه‌گیری تحقیق و پیشنهاد برای تحقیقات آتی ارایه شده است.

## ۲ مرور مقالات

اقلام فاسد شدنی در زندگی روزمره ما امری معمول به شمار می‌روند. تاکنون صاحب نظران و کارشناسان علوم به یک اتفاق نظر در تعریفی برای اقلام فاسد شدنی نائل نشده‌اند. با توجه به مطالعات وی هوی مینگ [۱] اقلام فاسدشدنی در زمره اقلام پوسیده‌شده، خراب شده، تبخیر شده، منسوخ شده و گاهی افت ارزش کالا در طول زمان ارجاع داده می‌شود. مدل‌های موجودی اقلام فسادپذیر را می‌توان بر اساس خصوصیات عمرشان به سه دسته زیر دسته‌بندی کرد.

مدل‌های موجودی با عمر ثابت، مدل‌های موجودی با عمر تصادفی و مدل‌های موجودی که زوال متناسب با موجودی انبار باعث کاهش مقدار فیزیکی و یا کاربری کالا می‌شود. هر کدام از این دسته‌ها جداگانه می‌توانند بر

اساس تقسیم‌بندی رعت، به دسته‌های مختلف دیگری تقسیم شوند: مدل‌های تک‌کالایی در مقابل چندکالایی، تقاضای قطعی در مقابل احتمالی، تقاضای متغیر یا ایستا، تک‌پریودی در مقابل چندپریودی، خرید در مقابل تولید محصول، کمبود غیرمجاز در مقابل کمبود مجاز، نرخ ثابت زوال در مقابل نرخ متغیر [۲].

مساله موجودی اقلام فاسدشدنی اولین بار توسط ویتین و واگنر [۳] مطالعه شد که وی اقلام فاسدشدنی مد را در انتهای دوره‌ی انبار مورد بررسی قرار داد. قاره و اشنایدر [۴] در مطالعه‌ی خود استنباط کردند که مصرف اقلام فاسدشدنی نسبتاً از تابع توزیع نمایی منفی نسبت به زمان پیروی می‌کند. آن‌ها مدل موجودی اقلام فاسدشدنی را به صورت زیر پیشنهاد کردند:

$$\frac{dI(t)}{dt} + \theta \times I(t) = -f(t)$$

در این تابع،  $\theta$  نرخ فاسدشدن اقلام،  $I(t)$  سطح موجودی در زمان  $t$  و سپس  $f(t)$  نرخ تقاضا در زمان  $t$  می‌باشد. این مدل موجودی، اساس مطالعات مشابه در این حوزه می‌باشد. مقالات [۲] و [۵] مرور ادبیات کاملی در زمینه‌ی اقلام فاسدشدنی بیان می‌کنند.

نرخ فاسدشدنی فاکتور مهمی در مطالعه موجودی اقلام فاسدشدنی می‌باشد که ماهیت فاسدشدنی اقلام را توصیف می‌کند. وقتی نرخ فاسدشدنی اقلام را ملاحظه می‌کنیم؛ شرایط مختلفی شاید روی دهد. در مراحل اول این مطالعه، اغلب نرخ‌های فاسدشدنی به صورت ثابت در نظر گرفته می‌شدند. مانند مقالات [۴]، [۶-۹]. در این مدل‌ها نرخ زوال نسبت ثابت یا متغیر از موجودی در دست است که به صورت تابع مشخصی (صعودی یا نزولی) نشان داده می‌شود. همان طور که در قبل ذکر شد اولین بار شنایدر و همکاران مدل ساده سفارش اقتصادی را با نرخ ثابت زوال ارائه دادند؛ در حالی که نرخ ثابت، حل مساله را ساده می‌سازد اما نمی‌تواند شرایط واقعی فاسدشدن را بازتاب دهد؛ بنابراین نرخ فاسدشدنی با ملاحظات زمان در تحقیقات اخیر، شرایط سناریوهای متفاوتی را به وجود آورده است. نرخ فاسدشدنی به صورت تابعی خطی از زمان [۱۰ و ۱۱]، به صورت توزیع وایبول دو پارامتری [۱۲-۱۴]، نرخ فاسدشدن به صورت توزیع وایبول سه پارامتری [۱۵] و نرخ فاسدشدنی به صورت توابع دیگری از زمان [۱۶] از جمله مقالاتی در مورد این حوزه می‌باشند که وابستگی نرخ فاسدشدن به زمان را مطرح می‌کنند. کوورت و فیلیپ مدل اشنایدر را توسعه دادند و مدل سفارش اقتصادی را برای نرخ متغیر زوال با فرض تابع توزیع وایبول با دو پارامتر به دست آوردند [۱۷].

برای تولید اقلام فاسدشدنی تصمیم‌گیرندگان می‌بایست موجودی را در سیاست تولید ملاحظه نمایند. پیشنهاد تصمیم موجودی تولید کارا جهت افزایش رقابت‌پذیری شرکت‌ها گرفته شده است [۱۸]. بسیاری از محققان به صورت گسترده‌ای در این حوزه مطالعه نمودند. مانند [۱۹-۲۳]. با فرض نرخ تقاضا، نرخ تولید و نرخ فاسدشدنی به صورت ثابت در مقالات [۲۴، ۲۵] مدل موجودی تولید برای اقلام فاسدشدنی تحت شرایطی که تامین‌کننده اعتبار تجاری برای خرده‌فروش تدارک می‌نماید. در مقاله‌ی [۲۶] مدل سفارش تولید بهینه برای اقلام فاسدشدنی در حالتی که نرخ تقاضا وابسته به قیمت فروش و سطح موجودی و نرخ فاسدشدنی ثابت، تاسیس گردید. یانگ و مینگ موجودی تولید برای اقلام فاسدشدنی مدل‌سازی نمودند. در این مقاله نرخ تولید و تقاضا به

صورت ثابت در نظر گرفته شده [۲۷]. مدیریت تولید فرصت‌هایی جهت استفاده‌های متفاوت در زمان‌های فروش فصلی بین بازارهای جغرافیایی پراکنده، برای اقلام فاسد شدنی جهت بهبود سودآوری شرکت امری مهم تلقی می‌شود. یونگ و شو مدل موجودی تولید اقلام فاسد شدنی را با ملاحظات چند بازاری و فصول فروش متفاوت برای کسب زمان بازپرسازی بهینه برای مواد اولیه و برنامه ریزی تولید برای کالاهای نهایی مطالعه نمودند [۲۸].

### ۳ نمادگذاری و مفروضات

در ادامه به تشریح نمادها و مفروضات جهت مدل‌سازی مساله تولیدکننده پرداخته شده است:

#### ۳-۱ نمادها

|                 |                                                        |
|-----------------|--------------------------------------------------------|
| $Q_i$           | موجودی در انتهای دوره $i$ ام بعد از تحویل سفارش.       |
| $t$             | شاخص زمان.                                             |
| $M$             | نرخ تولید در واحد زمان.                                |
| $\theta(t)$     | تابع توزیع فاسد شدن.                                   |
| $\alpha, \beta$ | پارامترهای ثابت تابع توزیع وایبول.                     |
| $q$             | اندازه دسته سفارش خرده فروش.                           |
| $A_p$           | هزینه ثابت راه اندازی در هر دوره تولیدکننده.           |
| $A_s$           | هزینه ثابت ارسال کالا برای خرده فروش در هر ارسال.      |
| $ch$            | هزینه نگهداری هر واحد کالا در واحد زمان.               |
| $cp$            | هزینه تولید یک واحد کالا برای تولیدکننده.              |
| $I_{p,i}(t)$    | سطح موجودی تامین در زمان $t$ در دوره $i$ ام.           |
| $n_p$           | تعداد تحویل در طی زمان $t_p$ .                         |
| $t'$            | مدت زمان از انتهای $n_p$ تا زمانی که تولید خاتمه یابد. |
| $t_p$           | مدت زمانی که تولید داریم $t_p = n_p \times T_b + t'$ . |
| $T_b$           | مدت یک سفارش تا سفارش بعدی خرده فروش ( $\lambda$ ).    |
| $T_p$           | یک دوره کامل تولیدکننده.                               |
| $t_d$           | مدت زمانی که مصرف داریم و تولید نداریم.                |
| $N$             | تعداد ارسالات تولیدکننده $N \times T_b = t_p + t_d$ .  |
| $TCA_p$         | کل هزینه راه اندازی و ارسال در هر دوره.                |
| $TCH_p$         | کل هزینه نگهداری انبار در هر دوره.                     |
| $TCP_p$         | کل هزینه تولید محصول در هر دوره.                       |
| $Revenue_p$     | کل درآمد حاصل از فروش در هر دوره.                      |

$profit_p$  کل سود حاصل از فروش در هر دوره.

### ۲-۳ مفروضات

در تمامی مدل‌هایی که در زمینه کنترل موجودی وجود دارند؛ فرض‌هایی در نظر گرفته می‌شود که بخشی از این فرضیات واقعی هستند و بخشی دیگر جنبه تئوری دارند که بیشتر برای ساده‌سازی محاسبات و جلوگیری از پیچیدگی مدل‌ها ارایه می‌گردد. فرضیات در نظر گرفته شده در مدل‌ها به صورت کلی در ادامه آمده است:

۱- نرخ فاسد شدن وابسته به زمان و از توزیع وایبول دو پارامتری پیروی می‌کند به گونه ای که اگر  $\theta(t)$

$$\theta(t) = \alpha \times \beta \times t^{\beta-1}; 0 < \alpha < 1, \beta > 0$$

۲- جایگزین نمودن و یا تعمیر اقلام فاسد شده مجاز نمی‌باشد.

۳- کمبود برای تولیدکننده مجاز نمی‌باشد.

۴- زمان تدارک صفر و نرخ بازپرسازی نامحدود می‌باشد.

۵- افق زمانی به صورت نامحدود فرض می‌شود.

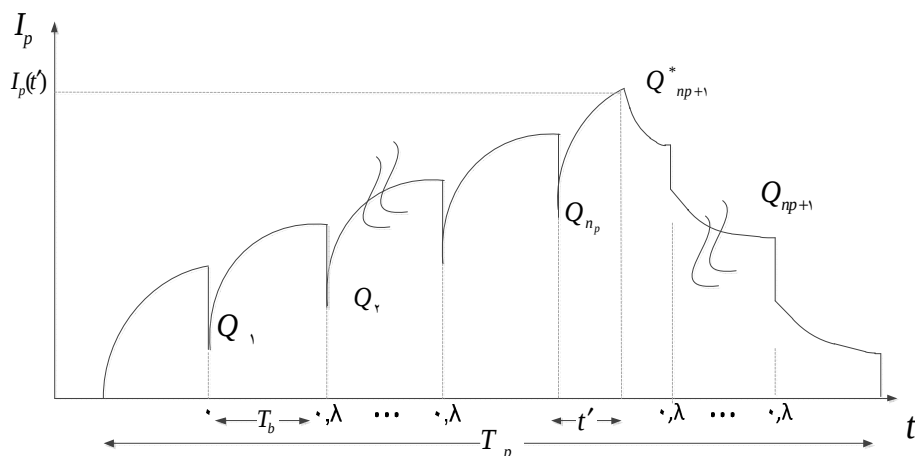
۶- نرخ تولید محدود و برابر  $M$  می‌باشد و نرخ تولید بزرگ‌تر از مجموع نرخ تقاضا و نرخ فاسد شدن است.

۷- تولیدکننده از دوره خرده‌فروش و مقدار سفارش اقتصادی او اطلاع کامل دارد و سیاست ارسال تولیدکننده به صورت ارسال محموله‌های مساوی در طول دوره تولیدکننده است.

### ۴ مدل‌سازی ریاضی

جهت درک بهتر مفاهیم ریاضی و مدل‌سازی تولیدکننده، مساله به صورت شماتیک به نمایش داده می‌شود.

سطح موجودی کالای تولیدشده توسط تولیدکننده در شکل ۲ نشان داده شده است. فرض گردیده تولیدکننده در زمانی قبل از سفارش مشتری شروع به تولید نموده؛ در زمانی که خرده‌فروش سفارش می‌دهد؛ کالا را ارسال می‌نماید.



شکل ۱. نمایش گرافیکی سیستم موجودی تولیدکننده

تولیدکننده به صورت انباشته‌ای به تولید می‌پردازد و در هر  $T_b$  پریود زمانی  $q_B$  واحد از موجودی تولیدکننده به خرده‌فروش منتقل می‌شود. سطح موجودی برای دوره  $i$ ام در سه قسمت به‌دست آمده است. قسمت اول در دوره‌های که تولید وجود دارد. قسمت دوم در دوره‌ای که تولید در طی آن متوقف می‌شود و قسمت سوم برای دوره‌های که در آن‌ها محصول تولید نشده و از موجودی انبار جهت تامین تقاضا تا انتهای دوره‌ی خرده‌فروش استفاده می‌شود.

قسمت اول: در دوره‌های تولید در حالت  $0 \leq t \leq \lambda, 1 \leq i \leq n_p$

در این حالت محصولات تولید شده وارد انبار تولیدکننده می‌شود. موجودی با نرخ تولید  $M$  افزایش یافته؛ موجودی داخل انبار با نرخ وابسته به زمان که از تابع توزیع وایسوال  $\theta(t) = \alpha \beta t^{\beta-1}$  با پارامترهای  $\beta > 0$  و  $0 < \alpha < 1$  فاسد می‌شود. بر این اساس موجودی تولیدکننده در این فاصله زمانی برای دوره  $i$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{dI_{p,i}(t)}{dt} = M - \theta(t) I_{p,i}(t) \quad (1)$$

$$I_{p,i}(0) = Q_{i-1}$$

با حل معادله دیفرانسیل فوق با شرط  $I_{p,i}(0) = Q_{i-1}$  و تغییر متغیر  $y$  داریم:

$$I_{p,i}(t) = \left( \int_0^t M e^{\alpha y^\beta} dy + Q_{i-1} \right) e^{-\alpha t^\beta} \quad (2)$$

$$= \int_0^t M e^{\alpha(y^\beta - t^\beta)} dy + Q_{i-1} e^{-\alpha t^\beta}$$

همان‌طور که برای خرده‌فروش بحث گردید با استفاده از بسط تابع تیلور و با نادیده فرض کردن توان‌های  $\alpha^2$  و بالاتر، مدل موجودی را مدل‌سازی می‌نماییم و تابع  $I_{p,i}(t)$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$I_{p,i}(t) = M \left( t - \frac{\alpha \beta t^{\beta+1}}{\beta+1} \right) - Q_{i-1} e^{-\alpha t^\beta} \quad (3)$$

همان‌طور که ملاحظه شد؛ مقدار سطح موجودی در انتهای پریود  $i$ ام ( $1 \leq i \leq n_p$ ) بعد از تحویل کالا به مشتری برابر خواهد بود با  $Q_i = I_{p,i}(\lambda) - q_B$ ، که این تعداد به عنوان سطح اولیه برای دوره  $i+1$ ام می‌باشد. هم‌چنین فرض شده که در ابتدای دوره‌ی تولید کالایی در انبار نباشد؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} Q_0 = 0 \\ Q_1 = I_{p,1}(\lambda) - q_B \\ Q_2 = I_{p,2}(\lambda) - q_B \\ \vdots \\ Q_{n_p} = I_{p,n_p}(\lambda) - q_B \end{cases} \quad (4)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳) و (۴) و با اثبات استقرای فوق مقدار موجودی انبار  $Q_i$  نتیجه می‌گردد:

$$Q_i = M \left( \lambda - \frac{\alpha \lambda^{\beta+1}}{\beta+1} \right) + M \left( \lambda - \frac{\alpha \lambda^{\beta+1}}{\beta+1} \right) (1 + (e^{-\alpha \lambda^{\beta}} + e^{-\alpha \lambda^{\beta}} + \dots =$$

$$M \left( \lambda - \frac{\alpha \lambda^{\beta+1}}{\beta+1} \right) (e^{-\alpha \lambda^{\beta}} + e^{-\alpha \lambda^{\beta}} + e^{-\alpha \lambda^{\beta}} + \dots) = M \left( \lambda - \frac{\alpha \lambda^{\beta+1}}{\beta+1} \right) \left( \sum_{j=0}^{i-1} e^{-j \alpha \lambda^{\beta}} \right) \quad (5)$$

قسمت دوم: در آخرین دوره تولید که تولید در طی آن متوقف خواهد شد (دوره  $n_{p+1}$ ) فرض شده که تولید در دوره  $n_p + 1$  تا جایی ادامه یابد که تمام کالای مورد نیاز خرده فروش را تا زمان  $T_p$  بتوان با مقدار انباشته تولید تامین کرد. فرض می کنیم این زمان  $t'$  باشد. بنابراین مقدار تولید انباشته شده در زمان  $t'$  در پریود  $n_p + 1$  ام به صورت زیر به دست می آید. مساله در حالتی که در آن  $t \leq t' \leq \lambda$  باشد بررسی شده است:

$$\text{الف) } 0 \leq t' \leq \lambda, i = n_p + 1 \text{ و } 0 \leq t \leq t'$$

از آنجایی که در این بازه در داخل انبار کالا داریم و محصول در حال تولید است؛ معادله موجودی همانند معادله (۳) به دست می آید.

$$I_{p,i}(t) = M \left( t - \frac{\alpha \beta t^{\beta+1}}{\beta+1} \right) - Q_{i-1} e^{-\alpha t^{\beta}} \quad (6)$$

جهت تعیین  $Q_{n_p+1}^*$  که همان بالاترین سطح موجودی تولید کننده است؛ کافی است از معادله (۶) استفاده نموده؛ در آن  $t'$  و  $i = n_p + 1$  را جای گذاری نماییم:

$$Q_{n_p+1}^* = I_{p,i}(t') = M \left( t' - \frac{\alpha \beta (t')^{\beta+1}}{\beta+1} \right) - Q_{n_p} e^{-\alpha (t')^{\beta}} \quad (7)$$

$$\text{ب) } 0 \leq t' \leq \lambda, i = n_p + 1 \text{ و } t' \leq t \leq \lambda$$

با توجه به آن که در این بازه زمانی دیگر تولید نداریم و فقط کالا فاسد می شود؛ معادلات دیفرانسیل زیر را نتیجه می دهد:

$$\frac{dI_{p,i}(t)}{dt} = -\alpha \beta t^{\beta+1} I_{p,i}(t)$$

$$I_{p,i}(t = \lambda) = Q_{n_p+1} \quad (8)$$

با حل معادله دیفرانسیل فوق با شرایط اولیه اشاره شده، معادله دیفرانسیل به صورت زیر حل شده است:

$$I_{p,i}(t) = e^{\alpha((\lambda)^{\beta} - t^{\beta})} Q_{n_p+1} \quad (9)$$

به ازای  $t = t'$  در معادله (۹) داریم:

$$Q_{n_p+1}^* = I_{p,i}(t') = e^{\alpha(\lambda^{\beta} - (t')^{\beta})} Q_{n_p+1} \quad (10)$$

قسمت سوم: در دوره پس از تولید (دوره  $n_{p+2}$  تا  $N$ )

با توجه به آن که از این دوره تا انتهای دوره موجودی تولیدکننده، تولید وجود ندارد و تنها برای موجودی انباشته شده فاسد شدن وجود دارد.

$$\frac{dI_{P,i}(t)}{dt} = -\alpha \beta t^{\beta-1} I_{P,i}(t), \quad (11)$$

$$I_{P,i}(t=0) = Q_{i-1}$$

با حل معادله دیفرانسیل فوق با شرایط اولیه اشاره شده، معادله دیفرانسیل به صورت زیر حل شده است:

$$I_{P,i}(t) = e^{-\alpha t^\beta} Q_{i-1} \quad (12)$$

در این قسمت (دوره بدون تولید) برای موجودی انبار انتهای دوره ها با توجه به این که در پایان دوره  $N$ ، موجودی تولیدکننده به صفر خواهد رسید یعنی  $Q_N = 0$  خواهیم داشت:

$$\begin{cases} Q_{n_p+r} = I_{P,n_p+r}(\lambda) - q_B \\ Q_{n_p+r-1} = I_{P,n_p+r-1}(\lambda) - q_B \\ \vdots \\ Q_{N-1} = I_{P,N-1}(\lambda) - q_B \\ Q_N = 0 \end{cases} \quad (13)$$

با استفاده از رابطه ی (۱۲) و (۱۳) و با اثبات استقرای فوق مقدار موجودی انبار  $Q_i$  نتیجه می گردد:

$$Q_i = q_B e^{\alpha \beta} + q_B e^{\alpha \beta} + q_B e^{\alpha \beta} + \dots = \sum_{j=i}^{N-1} q_B e^{j \alpha \beta} \quad (14)$$

در ادامه میزان هزینه های و درآمد سیستم محاسبه می گردد:

الف) هزینه راه اندازی و ارسال

هزینه راه اندازی و ارسال در یک دوره برابر خواهد بود با مجموع هزینه یک بار راه اندازی و  $N$  بار ارسال.

$$TCA_p = A_p + N \times A_s \quad (15)$$

ب) هزینه نگهداری موجودی

در قسمت تولید کننده هزینه نگهداری موجودی به سه قسمت مختلف تقسیم می گردد؛ قسمت اول حالتی است که تولید کننده در حال تولید است. قسمت دوم بازه زمانی از آنجایی است که تولید کننده، تولید خود متوقف می کند ( $t'$ ) تا اولین سفارشی که از طرف خرده فروش دریافت کند و همچنین برای قسمت سوم از زمان انتهای اولین سفارش پس از توقف تولید تا انتهای دوره تولید کننده به طول می انجامد:

$$TCH_{p1} + TCH_{p2} + TCH_{p3} = ch \times \left( \sum_{i=1}^{n_p+1} \int_0^{t'} M \left( t - \frac{\alpha \beta t^{\beta+1}}{\beta+1} \right) - Q_{i-1} e^{-\alpha \beta} dt \right. \\ \left. + \int_{t'}^{T_b-t'} e^{\alpha((t')^\beta - t^\beta)} Q_{n_p+1} dt + \sum_{n_p+2}^N \int_0^{T_b} e^{-\alpha \beta} Q_{i-1} dt \right) \quad (16)$$

ج) هزینه تولید محصول در یک دوره:

$$TCP_p = Cp \times t_p \times M = Cost \times (n_p \times T_b^* + t') \times M \quad (17)$$

د) درآمد حاصل از فروش در دوره:

$$Revenue_p = Price \times N \times q_B \quad (18)$$

ه) طول دوره تولید کننده:

$$T_p = N \times T_b = N \times \lambda \quad (19)$$

و) کل سود حاصل از فروش تولید کننده در دوره:

بر اساس توضیحاتی که در قسمت تعیین هزینه کل خرده فروش آمد؛ برای سود کل تولید کننده خواهیم داشت:

$$profit_p = \frac{Revenue_p - TCA_p - TCH_p - TCP_p}{T_p} \quad (20)$$

در واقع سود تولید کننده تابعی است از میزان سفارش خرده فروش  $q_B$  و تعداد ارسالی که تولید کننده تصمیم می گیرد در دوره اش داشته باشد. از آنجایی که میزان درآمد تولید کننده به سیاست های سفارش دهی خرده فروش وابسته می باشد، در مدل تولید کننده هدف ماکزیم کردن سود در نظر گرفته شده است.

## ۵ الگوریتم حل

با توجه به تعریف مساله که تولید کننده می بایست از دوره و مقدار سفارش اقتصادی خرده فروش اطلاعات کافی داشته باشد لذا در ادامه الگوریتم تولید کننده پیشنهاد می گردد. از آنجایی که میزان درآمد تولید کننده به سیاست های سفارش دهی خرده فروش و میزان موجودی تولید کننده پس از تحویل سفارش به خرده فروش در هر دوره بستگی دارد لذا امکان اثبات بهینه سازی تئوری به صورت مشتق گیری وجود ندارد. در قسمت مثال عددی با استفاده از جستجو برای نقطه بهینه محلی و تحلیل حساسیت سود تولید کننده، به بهینگی و منحصر به فرد بودن جواب بهینه می پردازیم.

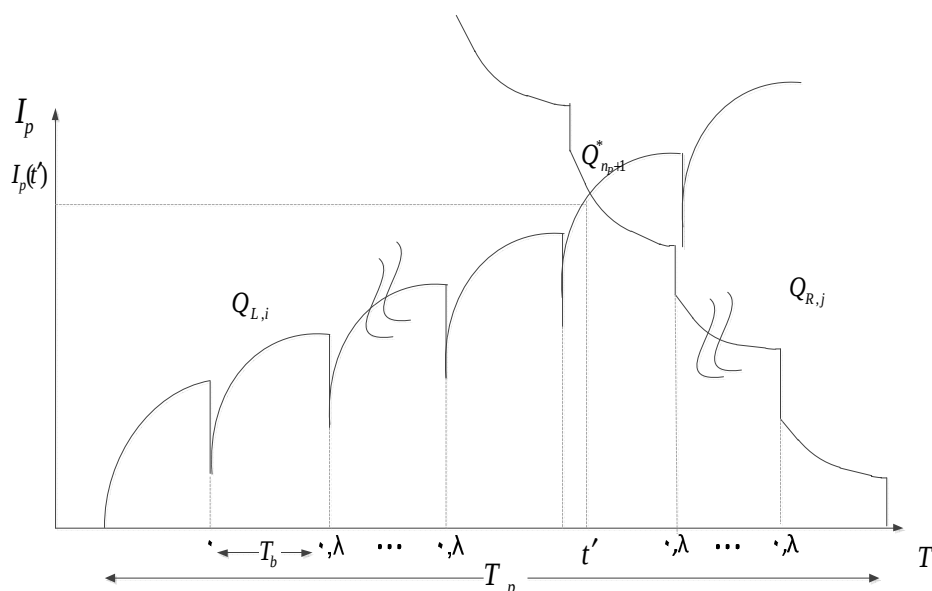
## الگوریتم حل تولید کننده

به ازای  $N$  ثابت الگوریتم زیر جهت تعیین  $n_p$  ارایه شده است. پس از تعیین  $n_p$  راهکاری برای محاسبه  $t'$  توسعه داده شد.

۱. با توجه به  $Q_0 = 0$  در معادله موجودی تولید کننده و با استفاده از رابطه (۵)  $Q_i$ ، برای  $i = 1, \dots, N$  برای تمامی دوره ها تعیین شود که با  $Q_{L,i}$  نمایش داده شده است.

۲. با توجه به  $Q_N = 0$  و با استفاده از رابطه (۱۴)  $Q_j$  به صورت بازگشت  $(N-1, N-2, \dots, N-j)$  با  $Q_{R,j}$  نشان داده شده و تا زمانی محاسبه می‌شود که  $Q_{R,j} \geq Q_{L,i}$ .

۳. بر اساس بیشترین مقدار  $i$  که در رابطه فوق صدق نماید  $n_p = i - 1$  می‌باشد.



شکل ۲. نمایش گرافیکی الگوریتم حل

۴. با استفاده از معادله‌ی (۵) و (۷) و  $n_p$  به دست آمده از مرحله‌ی ۳، مقدار  $Q_{n_p+1}^*$  محاسبه گردد.

۵. با استفاده از برابر قرار دادن معادله‌های (۷) و (۱۰)، مقدار  $t'$  محاسبه شود.

۶. با فرض آن که مقدار  $N$  عدد صحیح است (در مقالات مختلف اثبات شده است). با استفاده از جستجو برای بهینه محلی، به ازای هر  $N$  در هر مرحله  $n_p$ ،  $t'$ ،  $price$  و متعاقباً هزینه موجودی تولیدکننده تعیین شده و بر اساس  $N$  بهینه می‌شود.

## ۶ مثال عددی و تحلیل حساسیت

در این قسمت مثالی ارائه شده و با تجزیه و تحلیل حساسیت روی پارامترهای مدل، نتایج تجزیه و تحلیل می‌شود. پارامترهای مساله در موارد مشابه از ادبیات استخراج گردیده است. بر این اساس پارامترهای مدل برای تولید کننده به شرح زیر می‌باشند:

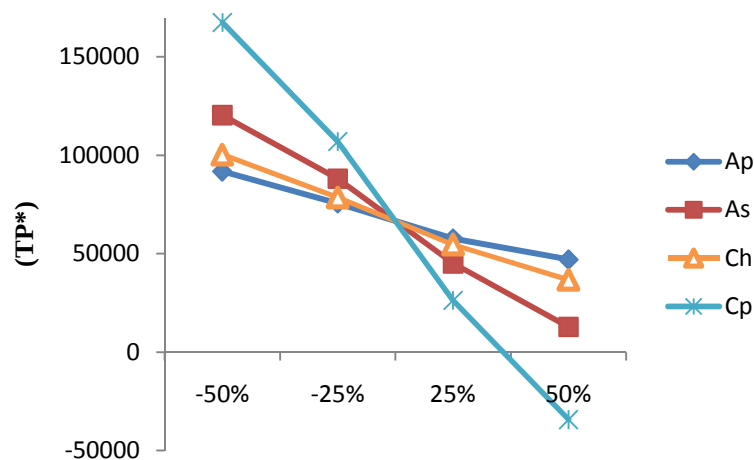
جدول ۱. متغیرها و پارامترهای تولید کننده

|               |         |          |      |
|---------------|---------|----------|------|
| $M$           | ۸۰۰ سال | $A_p$    | ۱۰۰۰ |
| $\lambda=T_b$ | ۰/۰۸۵۶۱ | $A_s$    | ۸۰۰  |
| $ch$          | ۳۰      | $\alpha$ | ۰/۰۵ |
| $cp$          | ۸۰      | $\beta$  | ۲/۲  |

بر اساس پارامترهای مدل موجودی تولید کننده و الگوریتم حل ارایه شده، نتایج بهینه و تجزیه و تحلیل حساسیت توسط نرم افزار MATLAB انجام شده که جداول و نمودارهای آن در ادامه آمده است:

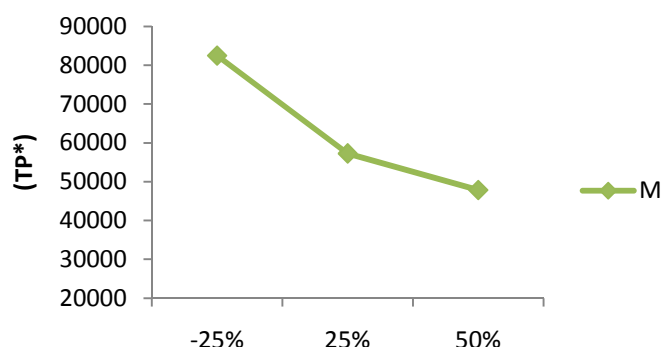
مقادیر بهینه  $N^* = 5$ ،  $t' = 0/0473$ ،  $n_p = 2$ ،  $t_p = 0/21852$ ،  $price = 196/225$ ،  $t_d = 0/20953$ ،  $profit_p = 66598/87$  و  $T_p^* = 0/42805$  به دست آمده است.

وقتی که مقادیر هزینه‌ها افزایش یابد؛ مقدار سود کاهش می‌یابد. به بیان دیگر تمامی هزینه‌ها با سود رابطه معکوسی دارند. نکته قابل توجه آن که سود نسبت به قیمت خرید حساسیت بالاتری را نشان می‌دهد و همان‌طور که در شکل زیر قابل مشاهده است؛ با ثابت ماندن مابقی پارامترها و افزایش ۵۰ درصدی هزینه خرید، مقدار سود منفی می‌گردد.



شکل ۳. آنالیز حساسیت سود با تغییر هزینه‌ها

با افزایش نرخ تولید میزان سود تولید کننده کاهش می‌یابد و نکته حایز اهمیت آن‌جاست که با کاهش ۵۰٪ نرخ تولید تولید کننده دچار کمبود می‌شود و با فرض مجاز نبودن کمبود در مدل تولید کننده، از برآورد سود آن صرف نظر شده است.



شکل ۴. آنالیز حساسیت سود با تغییر نرخ تولید

## ۷ نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی

در تحقیق حاضر ابتدا با توجه به فرضیات ارائه شده، مدل موجودی برای تولید کننده‌ای با کالای فاسد شدنی توسعه داده شد. همان‌گونه که در این تحقیق آمد، تعیین جواب‌های بهینه مدل با استفاده از الگوریتم‌های جستجو صورت گرفته است. جهت نشان دادن نتایج مدل از مثال عددی استفاده شده؛ جواب بهینه مدل به دست آمد. مدل موجودی تولید کننده با هدف ماکزیمم نمودن سود بهینه شد. در عمل در واقع دانستن تمامی هزینه‌ها و درآمدها برای بالادستی کاری بس دشوار و شاید غیر ممکن باشد؛ لذا تحقیق فوق از دو جنبه کاربرد عملیاتی پیدا می‌کند. اولاً با توجه به آن که تولید کننده از میزان و دوره سفارش دهی خرده فروش اطلاعات کامل پیدا می‌کند؛ این تحقیق برای زنجیره‌های هلدینگ اهمیت بالاتری پیدا می‌کند. ثانیاً برای خرده‌فروشی مناسب است که به جهت مناسب بودن بازار کالا و اطلاع از وضعیت تقاضا و دوره خود، تصمیم به تولید کالای مورد نظر نماید. یکی از تحقیقاتی که می‌تواند در ادامه این مقاله انجام پذیرد؛ وارد نمودن زمان تحویل سفارش است. مورد دوم وارد نمودن تخفیفات و هم‌چنین تاخیر در پرداخت‌هاست که می‌تواند به عنوان موضوعی برای مطالعات آتی ارائه شود.

## منابع

- [1] Wee, H. M. (1993). Economic production lot size model for deteriorating items with partial back-ordering. Computers & Industrial Engineering, 24, 449-458.
- [2] Raafat, F. (1991). Survey of literature on continuously deteriorating inventory models. Journal of the Operational Research Society, 27-37.
- [3] Wagner, H.M., and Whitin, T.M. (1958). Dynamic version of the economic lot size model. Management science, 5, 89-96.
- [4] Ghare, P., and Schrader, G. (1963). A model for exponentially decaying inventory. Journal of Industrial Engineering, 14, 238-243.
- [5] Goyal, S., Giri, B., (2001). Recent trends in modeling of deteriorating inventory. European Journal of operational research, 134, 1-16.
- [6] Shah, Y., Jaiswal, M., (1977). An order-level inventory model for a system with constant rate of deterioration. Opsearch, 14, 174-184.
- [7] Aggarwal, S., (1978). A note on an order-level inventory model for a system with constant rate of deterioration. Opsearch, 15, 184-187.

- [8] Padmanabhan, G., Vrat, P., (1995). EOQ models for perishable items under stock dependent selling rate. *European Journal of Operational Research*, 86, 281-292.
- [9] Bhunia, A., and Maiti, M. (1999). An inventory model of deteriorating items with lot-size dependent replenishment cost and a linear trend in demand. *Applied Mathematical Modelling*, 23, 301-308.
- [10] Bhunia, A., Maiti, M., (1998). Deterministic inventory model for deteriorating items with finite rate of replenishment dependent on inventory level. *Computers & operations research*, 25, 997-1006.
- [11] Mukhopadhyay, S., Mukherjee, R., Chaudhuri, K., (2004). Joint pricing and ordering policy for a deteriorating inventory. *Computers & Industrial Engineering*, 47, 339-349.
- [12] Wee, H. M., (1999). Deteriorating inventory model with quantity discount, pricing and partial backordering. *International Journal of Production Economics*, 59, 511-518.
- [13] Mahapatra, N., Maiti, M., (2005). Decision process for multiobjective, multi-item production-inventory system via interactive fuzzy satisficing technique. *Computers & Mathematics with Applications*, 49, 805-821.
- [14] Tripathy, C., Mishra, U. (2010). An inventory model for Weibull deteriorating items with price dependent demand and time-varying holding cost. *Applied Mathematical Sciences*, 44, 2171-2179.
- [15] Chakrabarty, T., Giri, B., Chaudhuri, K. (1998). An EOQ model for items with Weibull distribution deterioration, shortages and trended demand: an extension of Philip's model. *Computers & Operations Research*, 25, 649-657.
- [16] Abad, P. L., (2001). Optimal price and order size for a reseller under partial backordering. *Computers & Operations Research*, 28, 53-65.
- [17] Covert, R. P., Philip, G. C., (1973). An EOQ model for items with Weibull distribution deterioration. *AIIE transactions*, 5, 323-326.
- [18] Wen, X., Zuo, L., (2007). A review of development of deteriorating inventory theory research [J]. *Journal of South China Agricultural University: Social Science Edition*, 6, 46-52.
- [19] Goyal, S., Gunasekaran, A., (1995). An integrated production-inventory-marketing model for deteriorating items. *Computers & Industrial Engineering*, 28, 755-762.
- [20] Jiang, D., Du, W., (1998). A study on two-stage production systems of perishable goods [J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 33, 430-435.
- [21] Chen, S., Chen, S., Liu, X., (2002). A production-inventory model for deteriorating items [J]. *Journal of Zhaoqing University*, 23, 66-68.
- [22] Gontg, Z., and Wang, C. (2005). A production-inventory arrangement model for deteriorating items in a linear increasing market [J]. *Logistics Technology*, 6-8.
- [23] Maity, A., Maity, K., Mondal, S., Maiti, M., (2007). A Chebyshev approximation for solving the optimal production inventory problem of deteriorating multi-item. *Mathematical and Computer Modelling*, 45, 149-161.
- [24] Liao, J. J., (2007). On an EPQ model for deteriorating items under permissible delay in payments. *Applied Mathematical Modelling*, 31, 393-403.
- [25] Liao, J. J., (2008). An EOQ model with noninstantaneous receipt and exponentially deteriorating items under two-level trade credit. *International Journal of Production Economics*, 113, 852-861.
- [26] Teng, J. T., Chang, C. T., (2005). Economic production quantity models for deteriorating items with price-and stock-dependent demand. *Computers & Operations Research*, 32, 297-308.
- [27] Yang, P. C., Wee, H. M., (2003). An integrated multi-lot-size production inventory model for deteriorating item. *Computers & Operations Research*, 30, 671-682.
- [28] He, Y., Wang, S. Y., Lai, K., (2010). An optimal production-inventory model for deteriorating items with multiple-market demand. *European Journal of Operational Research*, 203, 593-600.