

یک روش هموارسازی برای محاسبه جواب با کمترین نرم دستگاه معادلات قدرمطلق

حسین موسائی^{۱*}، سعید کتابچی^۲

۱- استادیار، دانشگاه بجنورد، گروه ریاضی، بجنورد، ایران

۲- دانشیار، دانشگاه گیلان، گروه ریاضی کاربردی، رشت، ایران

رسید مقاله: ۲۱ آذر ۱۳۹۶

پذیرش مقاله: ۳ بهمن ۱۳۹۷

چکیده

یکی از موضوعاتی که از نظر تئوری و کاربردی مورد توجه پژوهشگران می باشد، مساله پیدا کردن جواب با کمترین نرم یک مساله می باشد. در واقع به طور کلی دستگاهی مانند دستگاه معادلات قدرمطلق می تواند بیش از یک جواب داشته باشد، در این حالت، طبیعی ترین و بهترین انتخاب، محاسبه جواب با کمترین نرم می باشد که در این مقاله جواب مساله با کمترین نرم-۱ این دستگاه بررسی و محاسبه می شود. با به کارگیری روش لاگرانژ بهبودیافته مساله مورد اشاره به یک مساله بهینه سازی بدون قید که تابع هدف آن تنها یک بار مشتق پذیر است تبدیل می شود. برای به کارگیری روش نیوتن از روش های هموارسازی استفاده کرده ایم. حل مساله های با اندازه بزرگ با سرعت بالا مبین کارایی روش اشاره شده می باشد.

کلمات کلیدی: دستگاه معادلات قدرمطلق، روش لاگرانژ بهبودیافته، جواب با کمترین نرم، روش های هموارسازی.

۱ مقدمه

یکی از موضوعاتی که همواره مورد توجه محققان در حوزه های مختلف بوده است، پیدا کردن جواب با کمترین نرم می باشد. پیدا کردن جواب با کمترین نرم، در برخی از مقالات به صورت تئوری بحث شده است [۱، ۲] و در برخی دیگر از مقالات از جنبه کاربردی مورد توجه قرار گرفته است [۳]. در همین رابطه در سال های اخیر بررسی جواب با کمترین نرم دستگاه معادلات قدرمطلق نیز مورد بررسی قرار گرفته است. دستگاه مورد نظر با توجه به معادل بودن آن با مسایل مکمل خطی که خود یک مساله پر کاربرد در حوضه های مختلف مانند مدل های اقتصادی، بازی های ماتریسی، کنترل و برنامه ریزی ریاضی می باشد، اینک مورد توجه بیش تری قرار گرفته است [۴-۱۵] و به صورت زیر تعریف می شود:

* عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیکی: hmoosaei@gmail.com, moosaei@ub.ac.ir

$$Ax - |x| = b, \quad (1)$$

که در آن $A \in R^{n \times n}$ ، $b \in R^n$ و $| \cdot |$ نمایانگر قدر مطلق مولفه‌ها می‌باشد.

در حالت کلی برای دستگاه (۱) سه حالت را می‌توان در نظر گرفت.

حالت اول: دستگاه جواب منحصر به فرد داشته باشد، که در این حالت باید به دنبال یافتن جواب بود برای این منظور روش‌های متعددی ارائه شده است [۱۶-۳۱]. حالت دوم: دستگاه جواب نداشته باشد که برای این حالت تصحیح دستگاه به صورت بهینه پیشنهاد شده است [۳۲، ۳۳]. حالت سوم: دستگاه چندین جواب داشته باشد، که در این وضعیت بهترین و طبیعی‌ترین انتخاب پیدا کردن جواب با کم‌ترین نرم است [۳۴، ۳۵].

در این مقاله وضعیتی که دستگاه (۱) بیش از یک جواب داشته باشد مورد توجه قرار گرفته و الگوریتمی عددی برپایه یک بحث نظری برای پیدا کردن جواب با کم‌ترین نرم-۱ ارائه شده است؛ البته در [۱۴] ایده‌ای نظری براساس برنامه‌ریزی اعداد صحیح برای یافتن جواب با کم‌ترین نرم دستگاه (۱) مطرح شده است.

مقاله [۳۴] به کمک قضایای جانشانی، قضیه‌ای برای پیدا کردن جواب با کم‌ترین نرم دستگاه (۱) اثبات کرده و براساس آن الگوریتمی همگرا ارائه گردیده است. نتایج محاسباتی، کارایی روش را نشان می‌دهند.

البته همان‌طور که در مقاله مشاهده می‌شود این روش برای اجرا نیاز به داشتن یک جواب معلوم از دستگاه دارد؛ یعنی ابتدا باید با روشی دستگاه حل گردد و سپس به کمک جواب به دست آمده جواب با کم‌ترین نرم محاسبه گردد. در [۳۵] برای یافتن جواب با کم‌ترین نرم دستگاه (۱)، مساله به صورت مساله درجه دوم با قیود درجه دوم و خطی مدل شده و سپس آن را به کمک روش تبرید شبیه‌سازی شده حل می‌نمایند. با توجه به اینکه مساله به-دست آمده نسبتاً پیچیده است، محاسبات زمان زیادی نیاز دارند که به همین دلیل نویسندگان در نتایج عددی مسایل را با اندازه کوچک و متوسط بررسی کرده‌اند.

هدف این مقاله ارائه روشی کارا و سریع برای یافتن جواب با کم‌ترین نرم-۱ دستگاه (۱) است به طوری-که محدودیت‌های روش‌های گذشته را برطرف نماید. در این رابطه مساله زیر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

$$\min_{x \in R^n} \|x\|, \quad (2)$$

$$\text{s.t. } Ax - |x| = b.$$

برای این منظور ابتدا مساله (۲) را به صورت مساله برنامه‌ریزی خطی مدل کرده و سپس روش لاگرانژ بهبود یافته برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی پیشنهاد می‌گردد. به کارگیری روش لاگرانژ بهبود یافته منجر می‌شود به مساله‌ای محدب و نامقید با تابع هدفی که تنها یک بار دیفرانسیل پذیر است. حال به کمک روش‌های هموارسازی مساله نامقید را به مساله‌ای با گرادیان هموار تبدیل و سپس به کمک روش نیوتن بر مبنای قاعده آرمیژو آن را حل می‌کنیم.

ساختار مقاله به این صورت است که در بخش ۲ هم ارزی مساله جواب با کم‌ترین نرم دستگاه (۱) و مساله برنامه‌ریزی خطی نشان داده شده است. روش لاگرانژ بهبود یافته در بخش ۳ بیان شده است. بخش ۴ به معرفی

الگوریتمی کارا به کمک روش هموارسازی می‌پردازد. در بخش ۵ به ارایه مثال‌های عددی برای بررسی کارایی روش و الگوریتم پیشنهادی می‌پردازیم. در انتها نتیجه‌گیری و پیشنهادها در بخش ۶ ارایه می‌شود.

۲ جواب با کم‌ترین نرم دستگاه معادلات قدرمطلق

در این بخش ابتدا به بیان قضیه‌ای برای حالتی که دستگاه معادلات قدرمطلق (۱) بیش از یک جواب دارد، پرداخته و سپس نشان داده شده مساله با کم‌ترین نرم ۱- دستگاه (۱) با مساله برنامه‌ریزی خطی معادل است.

قضیه ۱: اگر $b < 0$ و $\|A\|_{\infty} < \gamma/2$ که در آن $\gamma = \frac{\min_i |b_i|}{\max_i |b_i|}$ ، آنگاه سیستم (۱) دقیقاً 2^n جواب مجزا دارد.

هر کدام از جواب‌ها مولفه‌های ناصفر دارند و دارای علامت‌های مختلفی هستند.

اثبات: رجوع شود به [۱۵].

اکنون با توجه به مساله (۲) به بررسی مساله زیر می‌پردازیم:

$$\min_{x \in R^n} e^T |x|$$

$$\text{s.t. } Ax - |x| = b. \quad (3)$$

مساله (۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\min_{p, q \in R^n} e^T (p + q)$$

$$\text{s.t. } Ap - Aq - Ip - Iq = b, \quad (4)$$

$$p, q \geq 0,$$

$$\text{که در آن } p = \frac{|x| + x}{2} \text{ و } q = \frac{|x| - x}{2} \text{ می‌باشد.}$$

مساله فوق معادل با مساله برنامه‌ریزی خطی زیر است:

$$\min_{X \in R^n} e^T X$$

$$\text{s.t. } BX = b, \quad (5)$$

$$X \geq 0,$$

که در آن $X = [p \ q]^T$ و $B = [A - I \ -A - I]$ می‌باشد.

برای حل مساله (۵)، از روش هموار لاگرانژ بهبود یافته استفاده می‌شود که در بخش‌های بعدی توضیح داده خواهد شد.

۳ روش لاگرانژ بهبود یافته

طبق شرایطی که رابطه بین مساله خطی اولیه و مساله دوگان آن را توصیف می کند، جواب مساله خطی اولیه می تواند به وسیله بیشینه سازی تابع دوگان به دست آید. می توان به جای استفاده از تابع لاگرانژ دوگان از تابع لاگرانژ بهبود یافته دوگان استفاده نمود. این مینیمم سازی یک جواب تصویر کمترین نرم نقطه فرضی را در مجموعه جواب مساله خطی اولیه به ازای بعضی مقادیر باتعدادی متناهی پارامتر جریمه به ما ارایه خواهد داد. برای توضیح بیش تر مساله خطی اولیه زیر را در نظر می گیریم:

$$f^* = \min_{x \in X} c^T x, \quad X = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0\}, \quad (P)$$

که در آن $c \in R^n$ و $b \in R^m$ داده شده اند. فرض کنید که X^* مجموعه جواب مساله اولیه (P) و غیرتهی باشد؛ بنابراین مجموعه جواب مساله دوگان، که آن را U^* نشان می دهیم نیز غیرتهی خواهد شد. قضیه زیر بیان می کند که به کمک یک مساله کمینه سازی نامقید می توان جواب مساله دوگان (P) را به دست آورد. **قضیه ۲:** فرض کنید که X^* مجموعه جواب مساله (P) و غیرتهی و همچنین $\bar{x}$ نقطه ای متعلق به X^* باشد. آنگاه $\alpha^* > 0$ موجود است به طوری که برای هر $\alpha \geq \alpha^*$ ، $\bar{x}^*$ تصویر یکتای (با نرم اقلیدسی) نقطه $\bar{x}$ بر X^* با رابطه $\bar{x}^* = (\bar{x} + \alpha(A^T u(\alpha) - c))_+$ به دست می آید، که در آن $u(\alpha)$ نقطه کمینه مساله زیر است:

$$\min_{u \in R^m} \Phi(u, \alpha, \bar{x}) := -b^T u + \frac{1}{2\alpha} \|(\bar{x} + \alpha(A^T u - c))_+\|^2. \quad (6)$$

همچنین، برای هر $\alpha > 0$ و $\bar{x}^* \in X^*$ جواب مساله نامقید درجه دوم محدب (6)، $u^* = u(\alpha)$ ، یک جواب دقیق مساله دوگان است؛ یعنی $u(\alpha) \in U^*$.

اثبات: رجوع شود به [۳۶].

توجه داریم که مساله دوگان (P) به صورت زیر تعریف می شود:

$$f^* = \max_{u \in U} b^T u, \quad U = \{u \in R^m : A^T u \leq c\}, \quad (D)$$

بنابراین با توجه به (6) مشاهده می شود که تابع $\Phi(u, \alpha, \bar{x})$ تابع لاگرانژ فزوده یا لاگرانژ بهبود یافته برای مساله (D) است.

تابع $\Phi(u, \alpha, \bar{x})$ قطعه ای درجه دوم، محدب و دارای مشتق اول است؛ اما مشتق دوم آن موجود نمی باشد. فرض کنید $s, t \in R^m$ برای گرادیان $\nabla \Phi_u(u, \alpha, \bar{x})$ داریم:

$$\|\nabla \Phi_u(s, \alpha, \bar{x}) - \nabla \Phi_u(t, \alpha, \bar{x})\| \leq \|A\| \|A^T\| \|s - t\|,$$

این به این معناست که تابع $\nabla \Phi_u(u, \alpha, \bar{x})$ پیوسته لیپ شیتس با ثابت $K = \|A\| \|A^T\|$ است.

اکنون فرآیند تکراری زیر را معرفی می کنیم:

$$u^{k+1} = \arg \min_{u \in R^m} \{-b^T u + \frac{1}{2\alpha} \|(x^k + \alpha(A^T u - c))_+\|^2\}, \quad (7)$$

$$x^{k+1} = (x^k + \alpha(A^T u^{k+1} - c))_+,$$

که u^0 و x^0 یک نقطه شروع دلخواه است. براساس این فرآیند می توان قضیه زیر را بیان کرد:

قضیه ۳: فرض کنید مجموعه جواب X^* از مساله (P) غیر تهی باشد، آنگاه برای هر $\alpha > 0$ و هر نقطه شروع دلخواه x^0 روند تکراری (V) به $x^* \in X^*$ با تعداد مراحل k متناهی، همگراست و جواب کمترین نرم مساله اولیه $\hat{x}^*$ بعد از اولین تکرار از روند بالا به دست می آید. همچنین $u^* = u^{k+1}$ یک جواب دقیق مساله دوگان (D) است.

اثبات: به [۳۶] مراجعه شود.

برای استفاده از قضیه فوق برای یافتن جواب مساله (۵) نیاز به حل رابطه اول مساله (۷) است. در بخش بعد روشی برای حل مساله نامقید در (۷) ارائه خواهد شد.

۴. ارائه الگوریتم بر اساس روش های هموارسازی

در این بخش الگوریتمی را بر پایه روش های هموارسازی برای حل مساله نامقید (۷) ارائه می دهیم. در [۳۷] دسته ای از تابع های هموار ساز که به صورت زیر ساخته می شوند معرفی شده است.

تعریف ۱: فرض کنید تابع به طور قطعه ای پیوسته $\rho: R \rightarrow [0, \infty)$ در روابط زیر صدق کند:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(s) ds = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |s| \rho(s) ds < \infty.$$

در این صورت تابع ρ را تابع چگال می نامیم.

اینک با توجه به تعریف تابع چگال و به کمک آن می توان یک تابع هموار را به عنوان تقریبی از تابع پلاس به صورت زیر ارائه نمود:

$$\varphi(x, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \max(0, s - \frac{x}{\alpha}) \rho(s) ds.$$

در حالت خاص با انتخاب تابع ρ به صورت زیر:

$$\rho(s) = \frac{e^{-s}}{(1 + e^{-s})^2},$$

تابع هموار φ با پارامتر هموار ساز α به عنوان تقریبی از تابع پلاس با معادله

$$\varphi(x, \alpha) = x + \frac{1}{\alpha} \log(1 + e^{-\alpha x})$$

هموار زیر می رسم:

$$\text{Min}_{u \in R^n} f(u) := -b^T u + \frac{1}{2\alpha} \|(\varphi(x + \alpha(A^T u - c), \alpha))\|^2,$$

بنابراین فرآیند تکراری هموار زیر را به جای فرآیند تکراری (۷) خواهیم داشت:

$$u^{k+1} = \arg \min_{u \in R^n} \{-b^T u + \frac{1}{2\alpha} \|(\varphi(x^k + \alpha(A^T u - c), \alpha))\|^2\}, \quad (8)$$

$$x^{k+1} = (x^k + \alpha(A^T u^{k+1} - c))_+.$$

می توان نشان داد وقتی پارامتر هموارسازی α به بی نهایت میل می کند، جواب مساله هموار (۸) تقریب خوبی برای جواب مساله (۷) است [۳۷]. با توجه به اینکه تابع هدف مساله (۸) هموار و دوبار دیفرانسیل پذیر است برای حل آن از روش نیوتن به کمک قاعده آرمیثو [۳۸، ۳۹، ۴۰] استفاده خواهد شد که الگوریتم آن در زیر آورده شده است. روش ارایه شده در تعداد متناهی تکرار همگرا می باشد برای توضیحات بیش تر به [۴۱] مراجعه نمایید.

الگوریتم نیوتن - آرمیثو

نقطه اولیه و دلخواه $u_0 \in R^m$ و معیار دقت $tol > 0$ انتخاب کنید

$i=0$ برای شمارنده قرار می دهیم

الگوریتم اجرا شود تا وقتی $\| \nabla f(u_i) \| \geq tol$

$\alpha_i = \max\{s, s\delta, s\delta^2, \dots\}$ را انتخاب کنید به طوری که

$$f(u_i) - f(u_i + \alpha_i d_i) \geq -\alpha_i \mu \nabla f(u_i)^T d_i$$

که در آن $\mu \in (0, 1)$ و $\delta \in (0, 1)$ و $s > 0$ مقداری ثابت و $d_i = -\nabla^2 f(u_i)^{-1} \nabla f(u_i)$

قرار می دهیم

$$u_{i+1} = u_i + \alpha_i d_i$$

و قرار می دهیم

$$i=i+1$$

پایان

در این الگوریتم چون ماتریس هسین منفرد باشد از جهت بهبود یافته زیر استفاده می کنیم:

$$-(\nabla^2 f(u_i) + \delta I_m)^{-1} \nabla f(u_i),$$

که در آن δ مقدار کوچک و مثبت است ($\delta = 10^{-4}$) و I_m ماتریس همانی از مرتبه m است.

۵ نتایج عددی

در این بخش با استفاده از فرآیندی که در مقاله مطرح شد به بررسی نتایج عددی می پردازیم. برای نشان دادن کارایی روش الگوریتم را روی مسایلی که به طور تصادفی تولید می شوند به کار می بریم. محاسبات با استفاده از نرم افزار MATLAB 2010a تحت سیستم عامل Core 2 Duo 2/53 GHz و 4GB RAM به دست آمده است.

برنامه تولید مساله به صورت زیر است:

الگوریتم برنامه تولید مساله تصادفی دستگاه معادلات قدر مطلق با تعداد جواب نامتناهی

n را به عنوان اندازه یا سائز ماتریس انتخاب کنید.

ماتریس A را به صورت تصادفی با اندازه n تولید کنید.

x را به عنوان جواب مساله به صورت تصادفی تولید کنید.
بردار b را برابر $b = A * x - |x|$ قرار دهید (تا مساله دارای جواب قطعی باشد).
الگوریتم بالا در کد متلب زیر بیان می شود:

```
n=input('Entern:');
A=spdiags(sign((rand(n,1)-2*rand(n,1))))+2,0,n,n);
x=rand(n,1)-rand(n,1);
b=A*x-abs(x)
```

نتایج در جدول ۱ ارایه شده است. ستون اول بعد ماتریس A را نشان می دهد و ستون دوم مقدار $\|Ax^* - |x^*| - b\|$ را نمایش می دهد و ستون سوم بیانگر نرم-۱، جواب با کم ترین نرم است. ستون چهارم نرم-۱ یکی از جواب ها را نشان می دهد و ستون آخر نشان دهنده زمان انجام محاسبات است.

جدول ۱. محاسبه جواب با کم ترین نرم دستگاه معادلات قدرمطلق

N	$\ Ax^* - x^* - b\ $	$\ x^*\ $	$\ x\ $	Time(sec)
۱۰۰	۳/۹۷۹e-۰۱۳	۵/۱۷۶۹e+۰۰۳	۱/۶۰۴۱e+۰۰۴	۰/۱۰
۵۰۰	۵/۶۸۴۳e-۰۱۳	۲/۱۳۹۰e+۰۰۴	۷/۹۳۱۰e+۰۰۴	۰/۰۸
۱۰۰۰	۴/۵۴۷۵e-۰۱۳	۴/۴۹۲۵e+۰۰۴	۱/۷۱۳۷e+۰۰۵	۰/۱۰
۱۵۰۰	۵/۱۱۵۹e-۰۱۳	۶/۰۷۴۶e+۰۰۴	۲/۶۵۰۵e+۰۰۵	۰/۱۳
۲۰۰۰	۵/۱۱۵۹e-۰۱۳	۷/۲۴۹۷e+۰۰۴	۳/۳۸۷۹e+۰۰۵	۰/۱۳
۲۵۰۰	۵/۱۱۵۹e-۰۱۳	۹/۶۵۶۵e+۰۰۴	۴/۱۴۵۹e+۰۰۵	۰/۱۴
۳۰۰۰	۴/۵۴۷۵e-۰۱۳	۱/۲۵۰۷e+۰۰۵	۴/۹۳۰۴e+۰۰۵	۰/۲۶
۳۵۰۰	۵/۳۲۹۱e-۰۱۳	۱/۲۳۵۸e+۰۰۵	۵/۷۳۱۷e+۰۰۵	۰/۲۳
۴۰۰۰	۵/۶۸۴۳e-۰۱۳	۱/۶۶۰۰e+۰۰۵	۶/۶۹۳۰e+۰۰۵	۰/۲۵
۴۵۰۰	۵/۶۸۴۳e-۰۱۳	۲/۰۲۷۸e+۰۰۵	۷/۵۱۳۰e+۰۰۵	۰/۳۰
۵۰۰۰	۵/۴۰۰۱e-۰۱۳	۲/۱۰۶۳e+۰۰۵	۸/۲۴۷۷e+۰۰۵	۰/۲۳
۵۵۰۰	۴/۸۳۱۷e-۰۱۳	۲/۱۳۴۹e+۰۰۵	۹/۲۸۱۹e+۰۰۵	۰/۴۴
۶۰۰۰	۵/۱۱۵۹e-۰۱۳	۲/۴۸۷۷e+۰۰۵	۹/۷۱۵۰e+۰۰۵	۰/۳۵
۶۵۰۰	۵/۶۸۴۳e-۰۱۳	۲/۶۷۷۴e+۰۰۵	۱/۱۲۴۷e+۰۰۶	۱/۴۴
۷۰۰۰	۵/۶۸۴۳e-۰۱۳	۳/۰۳۸۳e+۰۰۵	۱/۱۵۶۸e+۰۰۶	۰/۵۰
۷۵۰۰	۵/۱۱۵۹e-۰۱۳	۳/۱۰۱۲e+۰۰۵	۱/۲۳۲۵e+۰۰۶	۱/۳۳
۸۰۰۰	۵/۶۸۴۳e-۰۱۳	۳/۴۷۹۲e+۰۰۵	۱/۳۵۵۷e+۰۰۶	۰/۶۶
۸۵۰۰	۵/۱۱۵۹e-۰۱۳	۳/۸۰۴۱e+۰۰۵	۱/۴۴۷۸e+۰۰۶	۰/۶۵
۹۰۰۰	۵/۶۸۴۳e-۰۱۳	۳/۶۱۹۵e+۰۰۵	۱/۵۰۱۸e+۰۰۶	۰/۵۳
۹۵۰۰	۵/۶۸۴۳e-۰۱۳	۴/۰۱۹۳e+۰۰۵	۱/۵۹۳۷e+۰۰۶	۰/۸۳
۱۰۰۰۰	۵/۶۸۴۳e-۰۱۳	۴/۱۷۷۷e+۰۰۵	۱/۶۳۵۴e+۰۰۶	۲/۸۷

۶ نتیجه گیری

در این مقاله دستگاه معادلات قدرمطلق در حالتی که بیش از یک جواب دارد، بررسی و جواب با کمترین نرم-۱ این دستگاه محاسبه شد. با تغییر متغیر و به کارگیری روش لاگرانژ بهبود یافته مساله غیرخطی مقید (۳) مبدل به مساله نامقید (۶) با تابع هدف قطعه قطعه هموار محدب و تنها یک بار مشتق پذیر می شود. به کمک این ایده به مساله ای به مراتب با تعداد متغیرهای کمتر و با اندازه کوچک تر نسبت به مساله (۳) رسیدیم و بر همین اساس قادر به حل مساله های با اندازه های بزرگ با سرعت بالا شدیم. محاسبات جدول ۱ به خوبی مبین کارایی ایده به کار گرفته شده در این مقاله است. از طرف دیگر برخلاف روش های سابق رتبه ماتریس و یا چگالی آن؛ حتی چگونگی انتخاب تصادفی درایه های ماتریس ها و بردارهای تولید شده، محدودیتی در حل مساله های دستگاه معادلات قدرمطلق به وجود نیاورده است و این مبین مزیت این روش نسبت به کارهای پیشین است.

منابع

- [۳۸] عهدی، ا.، رضاپور، ر.، (۱۳۸۹). توسعه روش تکراری نیوتن و معرفی روش های سریع برای حل معادلات غیرخطی. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۷(۳)، ۱۱-۱۹.
- [۳۹] صابری نجفی، ه.، کردرستمی، س.، سهرابی گیلانی، ن.، (۱۳۸۵). مقایسه روش های تکراری نیوتن، بریدن و شبه نیوتن برای حل دستگاه های معادلات غیر خطی. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۳(۸)، ۲۳-۳۷.
- [1] Kanzow, C., Qi, H., Qi, L., (2003). On the minimum norm solution of linear programs. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 116(2), 333-345.
- [2] Rosen, J. B., (1990). Minimum norm solution to the linear complementarity problem. *Functional Analysis, Optimization and Economics*, 208-216.
- [3] Huang, M. X., Dale, A. M., Song, T., Halgren, E., Harrington, D. L., Podgorny, I., Lee, R. R., (2006). Vector-based spatial-temporal minimum L1-norm solution for MEG. *NeuroImage*, 31(3), 1025-1037.
- [4] Cottle, R. W., Pang, J. S., Stone, R. E., (1992). *The Linear Complementarity Problem*, Academic Press New York.
- [5] Eaves, B. C., (1971). The linear complementarity problem. *Management science*, 17(9), 612-634.
- [6] Gale, D., (1989). *The theory of linear economic models*. University of Chicago press.
- [7] Edalatpour, V., Hezari, D., Salkuyeh, D. K., (2017). A generalization of the Gauss-Seidel iteration method for solving absolute value equations. *Applied Mathematics and Computation*, 293, 156-167.
- [8] Cruz, J. B., Ferreira, O. P., Prudente, L. F., (2016). On the global convergence of the inexact semi-smooth Newton method for absolute value equation. *Computational Optimization and Applications*, 65(1), 93-108.
- [9] Lemke, C. E., (1965). Bimatrix equilibrium points and mathematical programming. *Management science*, 11(7), 681-689.
- [10] Murty, K., (1988). *Linear complementarity, linear and nonlinear programming* Heldermann, Berlin. Google Scholar.
- [11] Shen, J., Pang, J. S., (2005). Linear complementarity systems: Zeno states. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 44(3), 1040-1066.
- [12] De Schutter, B., (2008). The extended linear complementarity problem and its applications in analysis and control of discrete-event systems. In *Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria* (pp. 541-570). Springer, New York, NY.
- [13] Pardalos, P. M., Ketabchi, S., Moosaei, H., (2014). Minimum norm solution to the positive semidefinite linear complementarity problem. *Optimization*, 63(3), 359-369.
- [14] Prokopyev, O., (2009). On equivalent reformulations for absolute value equations. *Computational Optimization and Applications*, 44(3), 363.

- [15] Mangasarian, O. L., Meyer, R. R., (2006). Absolute value equations. *Linear Algebra and Its Applications*, 419(2-3), 359-367.
- [16] Longquan, Y. O. N. G., (2010). Particle swarm optimization for absolute value equations. *Journal of Computational Information Systems*, 6(7), 2359-2366.
- [17] Mangasarian, O. L., (2007). Absolute value equation solution via concave minimization. *Optimization Letters*, 1(1), 3-8.
- [18] Mangasarian, O. L., (2009). A generalized Newton method for absolute value equations. *Optimization Letters*, 3(1), 101-108.
- [19] Mangasarian, O. L., Meyer, R. R., (2006). Absolute value equations. *Linear Algebra and Its Applications*, 419(2-3), 359-367.
- [20] Mangasarian, O. L., (2012). Primal-dual bilinear programming solution of the absolute value equation. *Optimization Letters*, 6(7), 1527-1533.
- [21] Mangasarian, O. L., (2013). Absolute value equation solution via dual complementarity. *Optimization Letters*, 7(4), 625-630.
- [22] Mangasarian, O. L., (2015). A hybrid algorithm for solving the absolute value equation. *Optimization Letters*, 9(7), 1469-1474.
- [23] Moosaei, H., Ketabchi, S., Noor, M. A., Iqbal, J., Hooshyarbakhsh, V., (2015). Some techniques for solving absolute value equations. *Applied Mathematics and Computation*, 268, 696-705.
- [24] Noor, M. A., Iqbal, J., Al-Said, E., (2012). Residual iterative method for solving absolute value equations. In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2012). Hindawi.
- [25] Noor, M. A., Iqbal, J., Khattri, S., Al-Said, E., (2011). A new iterative method for solving absolute value equations. *International Journal of Physical Sciences*, 6(7), 1793-1797.
- [26] Noor, M. A., Iqbal, J., Noor, K. I., Al-Said, E., (2012). On an iterative method for solving absolute value equations. *Optimization Letters*, 6(5), 1027-1033.
- [27] Rohn, J., (2009). On unique solvability of the absolute value equation. *Optimization Letters*, 3(4), 603-606.
- [28] Rohn, J., (2012). An algorithm for computing all solutions of an absolute value equation. *Optimization Letters*, 6(5), 851-856.
- [29] Rohn, J., (2012). A theorem of the alternatives for the equation $|Ax| - |B||x| = b$. *Optimization Letters*, 6(3), 585-591.
- [30] Rohn, J., Hooshyarbakhsh, V., Farhadsefat, R., (2014). An iterative method for solving Absolute value equations and sufficient conditions for unique solvability. *Optimization Letters*, 8(1), 35-44.
- [31] Salkuyeh, D. K., (2014). The Picard-HSS iteration method for absolute value equations. *Optimization Letters*, 8(8), 2191-2202.
- [32] Ketabchi, S., Moosaei, H., (2012). Optimal error correction and methods of feasible directions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 154(1), 209-216.
- [33] Ketabchi, S., & Moosaei, H., (2012). An efficient method for optimal correcting of absolute value equations by minimal changes in the right hand side. *Computers & Mathematics with Applications*, 64(6), 1882-1885.
- [34] Ketabchi, S., & Moosaei, H., (2012). Minimum norm solution to the absolute value equation in the convex case. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 154(3), 1080-1087.
- [35] Moosaei, H., Ketabchi, S., Jafari, H., (2015). Minimum norm solution of the absolute value equations via simulated annealing algorithm. *Afrika Matematika*, 26(7-8), 1221-1228.
- [36] Evtushenko, Y. G., Golikov, A. I., Mollaverdy, N., (2005). Augmented Lagrangian method for large-scale linear programming problems. *Optimization Methods and Software*, 20(4-5), 515-524.
- [37] Chen, C., Mangasarian, O. L., (1996). A class of smoothing functions for nonlinear and mixed complementarity problems. *Computational Optimization and Applications*, 5(2), 97-138.
- [40] Li, X., Shi, J., Dong, X., Yu, J., (2019). A new conjugate gradient method based on Quasi-Newton equation for unconstrained optimization. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 350, 372-379.
- [41] Mangasarian, O. L., (2004). A Newton method for linear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 121(1), 1-18.