

مقایسه عملکرد مدل‌های پیش‌بینی خاکستری با هدف پیش‌بینی قیمت نفت خام

حبیب‌اله جوانمرد^{۱*}، سیده فاطمه فقیدیان^۲

۱-دانشیار، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اراک، گروه مدیریت صنعتی، اراک، ایران

۲-دانشجوی دکتری، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران، گروه مهندسی صنایع، تهران، ایران

رسید مقاله: ۲۵ خرداد ۱۳۹۴

پذیرش مقاله: ۲۶ آبان ۱۳۹۴

چکیده

به کارگیری روش‌های کمی پیش‌بینی در زمینه‌های مختلف مورد توجه گسترده قرار گرفته است. تغییرات سریع محیط‌های ناشناخته در دنیای واقعی و به‌ویژه در بازارهای مالی سبب ایجاد مشکلاتی برای پیش‌بینی‌کنندگان برای تامین داده‌های مورد نیاز شده است. برتری مدل‌های خاکستری نسبت به مدل‌های پیش‌بینی متداول در این است که مدل‌های خاکستری برای پیش‌بینی رفتار سیستم نیاز به تعداد کمی داده دارد و نیز رفتار سیستم را بدون دانستن مدل ریاضی آن پیش‌بینی می‌کند. هدف از این پژوهش معرفی و استفاده از مدل‌های پیش‌بینی خاکستری برای پیش‌بینی قیمت نفت خام اوپک و مقایسه دقت این مدل‌ها در پیش‌بینی قیمت نفت خام می‌باشد. نتایج حاصله نشان داد که مدل چرخشی و مدل متداول خاکستری، مدل‌های مناسبی برای پیش‌بینی قیمت نفت محسوب می‌شود و از دقت بالایی برخوردار است.

کلمات کلیدی: مدل پیش‌بینی خاکستری، مدل چرخشی خاکستری، مدل ورهالست، مدل جدید (نول) خاکستری، قیمت نفت خام.

۱ مقدمه

پیش‌بینی از مهم‌ترین عوامل موثر در بهبود عملکرد مدیران و تصمیم‌گیرندگان در حوزه‌های علمی، صنعتی، مالی و سیاسی است. برای کاهش ریسک عملکرد مدیران صنعتی و مدیران مالی در شرایط ناپایدار اقتصاد امروز، پیش‌بینی از موقعیت‌های آینده می‌تواند منجر به عملکرد موفق مدیران گردد. کاهش ریسک تصمیم‌گیری مدیران برای سیستم‌های مالی و برای بهبود عملکرد سیستم‌های تولیدی مانند کنترل موجودی، برنامه‌ریزی تولید و بودجه‌بندی شرکت‌ها رویکردی حیاتی دارد. پیش‌بینی، فرآیند تصویر آینده بر مبنای داده‌های تاریخی است که در حوزه‌های مختلف از جمله بازارهای مالی، صنعت توریسم، مدیریت و بازاریابی و انرژی مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱]. پیش‌بینی در بازارهای مالی بسیار پیچیده است و دلایل این پیچیدگی را می‌توان این‌گونه خلاصه

*عهده دار مکاتبات

آدرس الکترونیک: h-javanmard@iau-arak.ac.ir

کرد: ۱) نایستایی داده‌ها، ۲) غیر خطی بودن روند داده‌ها، ۳) تغییرات زیاد داده‌ها [۲]. یکی از مهم‌ترین بازارهای مالی، بازار نفت است. سیستم قیمت‌گذاری نفت در این بازارها از پیچیده‌ترین، مبهم‌ترین و غیرشفاف‌ترین سیستم‌های قیمت‌گذاری است. نفت خام به عنوان مهم‌ترین کالای استراتژیک در اقتصاد جهانی، ماده‌ای حیاتی برای کشورهای صنعتی و سنگ بنای اقتصاد کشورهای عضو اوپک محسوب می‌شود. نفت را می‌توان یکی از متغیرهای موثر در تعیین بسیاری از معادلات منطقه‌ای و بین‌المللی دانست. از این رو نفت جزو معدود کالاهایی است که علاوه بر بعد اقتصادی و فنی، دارای بعد سیاسی و اجتماعی نیز هست.

کشورهای عضو اوپک، اغلب کشورهای در حال توسعه با ساختار اقتصادی ناپایدار هستند. اقتصاد این کشورها وابستگی شدیدی به نفت دارد و همین امر این کشورها را در جرگه کشورهای تک محصولی قرار می‌دهد. از این رو نوسانات شدید قیمت نفت می‌تواند سبب بروز بحران‌های اقتصادی مختلفی از جمله رکود، تشدید تورم و یا هر دو شود. شوک‌های نفتی ناشی از نوسانات قیمت نفت می‌تواند اثرات متفاوتی بر اقتصاد کشورهای عضو اوپک داشته باشد و علت آن را می‌توان در تفاوت زیر ساخت بخش‌های اقتصادی و سیاسی هر جامعه و یا در درجه وابستگی بودجه آن کشور به درآمدهای ارزی حاصل از فروش نفت و یا در سیستم پرداخت مالیاتی جستجو کرد. به همین علت پیش‌بینی صحیح قیمت نفت خام کشورهای عضو اوپک، می‌تواند نقش بسزایی در ایمن‌سازی اقتصاد این کشورها در مقابل اثرات ناشی از این نوسانات داشته باشد.

پیش‌بینی قیمت نفت خام تنها حوزه مورد علاقه محققان علمی-پژوهشی نبوده؛ بلکه مورد توجه بسیاری از محافل سیاسی-اقتصادی نیز بوده است. تصمیم‌گیرندگان سیاسی و پژوهشگران اقتصادی همواره در صدد اطلاع از پیش‌بینی صحیح قیمت نفت خام بوده‌اند. بدیهی است صحت و دقت این پیش‌بینی‌ها می‌تواند از جمله رموز موفقیت سیاست‌گذاران محسوب شود.

امروزه با وجود روش‌های متعدد پیش‌بینی، هنوز هم پیش‌بینی دقیق در بازارهای مالی کار چندان ساده‌ای نیست. تحقیقی پیرامون ادبیات موضوع مربوط به پیش‌بینی در سیستم‌های مالی و همچنین تحقیقات متعدد انجام شده در بازارهای مختلف و به‌ویژه بازارهای مالی همچون بازارهای ارز، بازار بورس اوراق بهادار، بازار سکه و طلا، بازار فلزات قیمتی و نیز بازار نفت و سایر انرژی‌های مصرفی همگی نشانگر اهمیت موضوع مورد بحث می‌باشد. گرچه مطالعات مدل‌های زیادی در حوزه پیش‌بینی قیمت نفت معرفی کرده‌اند؛ اما این مدل‌ها هم مزایا و هم نقایص و کمبودهایی دارند.

برای استفاده از مدل‌های موجود پیش‌بینی قیمت نفت، شناخت ساختار سیستم قیمت‌گذاری نفت در سطح بین‌المللی ضروری است. با وجود این آیا ساختار سیستم قیمت‌گذاری در سطح بین‌المللی کاملاً شناخته شده و شفاف است؟ آیا محققان این زمینه در مدل‌های پیش‌بینی خود از تمامی عوامل اثرگذار استفاده کرده‌اند؟ آیا اطلاعات استفاده شده توسط این محققان کاملاً شفاف و کافی است؟ اینها سوالاتی است که از درجه اعتماد به دقت و صحت مدل‌های موجود پیش‌بینی قیمت نفت می‌کاهد. بی‌تردید شناسایی و به کارگیری تمامی پارامترهای اثرگذار بر بازارهای جهانی نفت منجر به پیچیدگی بیش‌تر مدل‌های پیشنهادی و گاه عدم اثرگذاری مدل‌های مذکور می‌شود. مدل پیش‌بینی خاکستری به عنوان هسته اصلی تئوری سیستم‌های خاکستری، مزایای ایجاد یک

مدل با داده‌های کم و غیرقطعی را دارد و ابزاری مناسب برای پیش‌بینی سیستم‌هایی با ساختار پیچیده و نامطمئن در کوتاه مدت است [۳]. پژوهش حاضر با معرفی تئوری سیستم خاکستری و مدل‌های پیش‌بینی خاکستریا مقایسه مدل‌های موجود خاکستری، مدلی مناسب برای بهبود عملکرد پیش‌بینی قیمت نفت معرفی می‌کند.

۲ تئوری سیستم‌های خاکستری

بعد از انقلاب فرهنگی در چین (۱۹۷۶)، دولت چین در سطوح مختلف به شدت درگیر برنامه‌ریزی‌های اقتصادی بود و به دلیل آثار شدیداً مخرب انقلاب فرهنگی، تقریباً هیچ داده‌ی تاریخی و آماری باقی نمانده بود. به همین علت هیچ یک از تئوری‌های علمی موجود که بر پایه آمار بودند، قابل قبول نبود. برای برخورد با این چالش «پروفسور جولانگ دنگ» و پیروانش در چین از سال (۱۹۸۰) تحقیقاتی را با نام تئوری سیستم‌های خاکستری شروع کردند [۴].

دنگ [۵] حاصل تحقیق خود را در دانشگاه علوم و تکنولوژی هازمونگ چین با معرفی مفاهیم و تئوری خاکستری در مقاله‌ای تحت عنوان «مسایل کنترل سیستم‌های خاکستری» در مجله بین‌المللی «Systems & control Letters» به چاپ رسانید. از آن پس تئوری سیستم‌های خاکستری به طور رسمی معرفی شد. دنگ بر روی پیش‌بینی و کنترل سیستم‌های اقتصادی و سیستم‌های فازی مطالعات فراوانی داشت و با سیستم‌های با عدم قطعیت بالا مواجه بود. شاخص‌های این سیستم‌ها به سختی با ریاضیات فازی و یا آمار و احتمالات توصیف می‌شد. ریاضیات فازی به طور کلی با مسایلی مواجه است که عدم قطعیت توسط خبرگان به وسیله توابع عضویت گسسته/پیوسته قابل بیان است. آمار و احتمالات نیز به توابع توزیع و نمونه‌گیری بالا جهت رسیدن به روایی لازم نیاز دارد [۶] و هر دوی این روش‌ها نیاز به حجم داده فراوان دارد.

مزیت اصلی تئوری سیستم خاکستری نیاز آن به داده با حجم کم است. در واقع تئوری سیستم‌های خاکستری به عنوان یک روش بسیار موثر برای حل مسایل با داده‌های گسسته و اطلاعات ناقص مطرح شده است [۷ و ۸].

تئوری خاکستری شامل پنج بخش اصلی است که عبارت است از: پیش‌بینی خاکستری، رابطه خاکستری، تصمیم خاکستری، برنامه‌ریزی خاکستری، کنترل خاکستری. مدل پیش‌بینی خاکستری را می‌توان هسته اصلی تئوری خاکستری دانست.

عدم قطعیت موجود در مسایل مختلف تولید، اقتصاد و غیره ریشه در دو نوع عدم قطعیت دارد. اولین نوع عدم قطعیت، عدم قطعیت تصادفی است که ناشی از ماهیت تصادفی مساله است. در این حالت استفاده از روش‌های آماری و احتمالات و الگوهای توابع توزیع کاربردی است. مطالعه این جنبه از پدیده‌ها وابسته به نمونه‌هایی با حجم زیاد است و این فرضیه است که نمونه‌ها از یک الگوی مشخص تحت عنوان تابع توزیع احتمال پیروی می‌کنند [۹] دومین نوع عدم قطعیت، «عدم قطعیت ادراکی» است که ناشی از پیچیدگی ذاتی پدیده‌ها و کمبود اطلاعات جامع در مورد آن است [۹]. برای توصیف و مطالعه این جنبه از پدیده‌ها تئوری سیستم‌های خاکستری به عنوان بسط‌یافته‌ی تئوری فازی در شرایط با اطلاعات ناکامل توسعه یافته است. مزیت

تئوری خاکستری بر تئوری فازی این است که تئوری خاکستری شرایط فازی بودن را دربر می گیرد. به عبارت بهتر تئوری خاکستری می تواند به خوبی در شرایط فازی عمل کند [۶]. به کارگیری تئوری فازی مستلزم تشخیص تابع عضویت مربوطه بر اساس تجربه خبرگان است؛ اما تئوری خاکستری بدون در نظر داشتن تابع عضویت و بر اساس محدوده اطلاعات در دسترس نیز به خوبی عمل می کند [۱].

پیش بینی در بازارهای مالی معمولاً بر اساس سری های زمانی صورت می گیرد؛ اما به دست آوردن داده هایی به صورت سری زمانی مستلزم صرف هزینه و زمان زیادی است. روش های سنتی پیش بینی معمولاً بر پایه استفاده از سری های زمانی با داده های فراوان است؛ اما طی چند دهه اخیر محققان به روش هایی گرایش پیدا کرده اند که با استفاده از تعداد داده های کم تر بتوانند به نتایج مطلوب تری دست پیدا کنند. از این رو به دست آوردن داده های زمانی مختصر و جامع که بتواند اطلاعات کافی و جامعی را برای مدل سازی فراهم کند، بسیار ضروریست. محیط های ناآرام اقتصادی با ریسک پذیری بالا، سیستم های پیچیده و مبهم، رشد سریع تکنولوژی، همگی منجر به پیش بینی در بازه های زمانی کوتاه مدت و استفاده از داده های کم برای پیش بینی سری های زمانی شده است. اینها همگی از دلایلی است که محققان این پژوهش را به سمت پیش بینی در محیط های خاکستری رهنمون می سازد.

اساس پیش بینی سری های زمانی استفاده از روند اطلاعاتی یک متغیر در بازه زمانی گذشته و به کارگیری این اطلاعات برای مدل سازی روند فعلی آن متغیر و در نهایت پیش بینی روند آینده آن متغیر است. تلاش تمامی محققان این زمینه، ساختن مدل هایی کارآمد و کارا با دقت پیش بینی بالاست. در مقایسه با مدل های باکس - جنکینز و تکنیک های هوش مصنوعی که به تلاش و وقت زیادی برای مشخص کردن پارامترها و مدل سازی مراحل مختلف نیاز دارد، مدل پیش بینی خاکستری بسیار ساده تر و کاربردی تر است. به بیان دیگر این مدل نیاز به محاسبات سخت و پیچیده ریاضی و یا برنامه نویسی های پیچیده و دشوار ندارد و در مقابل نتایج نشان می دهد، استفاده از این مدل ها منجر به دقت بالاتری نسبت به تکنیک های پیش بینی فازی و سیستم عصبی می شود [۱۰]. تحقیقات اولیه در زمینه پیش بینی خاکستری بیش تر به پیش بینی تقاضای انرژی می پرداخت [۳] در سال های بعد محققان از این مدل ها در زمینه های گوناگونی استفاده کردند.

ترونک [۱۱] مدل اصلاح شده پیش بینی خاکستری را برای پیش بینی قدرت موج و کنترل انرژی موج های نامنظم انتخاب کرد. لین چیاو [۱۲] مدل پیش بینی خاکستری را در زمینه پیش بینی در پروژه های ساختمانی به کار برد. محققان تایوانی وانگ و همکارانش [۱۳] مقاله ای تحت عنوان بهبود موجودی کارا در RFID زنجیره تامین جهانی به وسیله مدل پیش بینی خاکستری را به چاپ رساندند. سانگ شنگ [۱۴] در مقاله ای به پیش بینی تعداد افراد استفاده کننده از بازی های اینترنتی و سود حاصل از آن در محیط خاکستری پرداختند. در همین سال دو محقق تایوانی با نام های مو-شانگ و هوئی ون [۱۵] از مدل پیش بینی خاکستری برای پیش بینی رشد یا آرایش کار در چین استفاده کردند.

۳ مدل‌های پیش‌بینی خاکستری

در مدل‌های پیش‌بینی خاکستری، مقادیر آینده را برای سری‌های زمانی پیش‌بینی می‌کنند که در بازه‌های زمانی یکسان اندازه‌گیری شده است. اساس پیش‌بینی این مدل‌ها بر پایه جدیدترین مجموعه داده‌ها شکل می‌گیرد و تمامی داده‌های مورد استفاده برای پیش‌بینی دارای مقادیری مثبت هستند و این دنباله داده‌ها، ثابت‌اند [۱۰]. وظیفه اصلی تئوری سیستم‌های خاکستری، استخراج قانون واقعی حاکم بر سیستم با استفاده از دنباله سری داده‌های موجود است. این پروسه به عنوان تولید دنباله خاکستری شناخته شده است [۱۶ و ۱۷].

۳-۱ مدل GM(n,m)

دنگ [۹]، لین و لیو [۱۷] مدل GM(n,m) را به عنوان اصلی‌ترین مدل پیش‌بینی در تئوری خاکستری معرفی کرده‌اند. اساس مدل کلاسیک پیش‌بینی خاکستری، مدل نمایی است [۱۸] و مدل کلاسیک GM(۱,۱) اساساً یک مدل نمایی است [۱۹]. مدل GM(n,m) مدل خاکستری است به گونه‌ای که n درجه معادله دیفرانسیل استخراج شده از دنباله اپراتور جمع‌کننده AGO است که این دنباله خود وابسته به دنباله اصلی مدل است و m نمایانگر تعداد متغیرهای موجود در مدل است. (m-۱) متغیر آن مستقل و یک متغیر آن وابسته است و معادله دیفرانسیل خطی آن به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸].

$$\frac{d^n x_1^{(1)}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_t^{(1)}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d x_t^{(1)}}{dt} + a_n x_t^{(1)} = b_1 x_1^{(1)}(t) + b_2 x_2^{(1)}(t) + \dots + b_m x_{m-1}^{(1)}(t) \quad (۱)$$

حال اگر m=۱ و n=۱ باشد، معادله دیفرانسیل آن به فرم رابطه (۲) تبدیل می‌شود:

$$\frac{d x_1^{(1)}}{dt} + a_1 x_1^{(1)} = b \quad (۲)$$

برای هموارسازی خط سیر تصادفی داده‌های اولیه مدل به جهت استفاده در مدل GM(۱,۱)؛ این داده‌ها تحت عملکرد اپراتور جمع‌کننده AGO قرار می‌گیرند [۱۶ و ۱۷]. در واقع مهم‌ترین و عمومی‌ترین رویه در روند تولید دنباله خاکستری را می‌توان اپراتور AGO دانست [۱۲]. به عبارت بهتر این اپراتور الگوی نظم درونی داده‌ها و یا روند سری داده‌ها را نمایان می‌کند [۲۰]. $x^{(0)}$ به عنوان دنباله اصلی داده‌ها در نظر گرفته می‌شود:

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$$

و پس از عملکرد اپراتور AGO دنباله $x^{(1)}$ به صورت رابطه (۳) محاسبه شده است:

$$\{x^{(1)}(k) = x^{(0)}(k) = \sum_{k=1}^1 x^{(0)}(k), \sum_{k=1}^2 x^{(0)}(k), \dots, \sum_{k=1}^n x^{(0)}(k)\} \quad (۳)$$

معادله دیفرانسیلی که در مدل خاکستری از آن استفاده می‌شود متفاوت از سایر معادلات دیفرانسیل است. سایر معادلات دیفرانسیل را برای مفاهیم پیوسته و دیفرانسیل‌پذیر استفاده می‌کنند، در صورتی که سیستم خاکستری قادر به استفاده از دنباله داده‌های گسسته برای ساختن مدل است. آن هم در زمانی که مفاهیم نه دیفرانسیل‌پذیرند نه پیوسته، به علاوه معادلات دیفرانسیلی عادی در محیط‌های بی‌کران (نامتناهی) اطلاعاتی استفاده می‌شود، در

صورتی که دنباله داده های خاکستری متعلق به فضای اطلاعاتی متناهی است [۲۱]. مدل $GM(1,1)$ در تئوری خاکستری را می توان به شرح زیر تعریف کرد [۲۰].

$$\sum_{i=0}^h a_i \frac{d^{(i)} x_1^{(1)}}{dt^i} = \sum_{j=2}^N b_j x_j^{(1)} \quad (4)$$

اگر $h=1$ و $N=2$.

$$\frac{d x_1^{(1)}}{dt} = a_1 x_1^{(1)} = b_1 \Rightarrow \frac{d x_1^{(1)}}{dt} + a_1 x_1^{(1)} = b \quad (5)$$

در نتیجه معادله دیفرانسیل خاکستری مدل $GM(1,1)$ به صورت رابطه (۶) به دست می آید.

$$x^{(1)}(k) + az^{(1)}(k) = b_1 \Rightarrow x^{(1)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad (6)$$

A

را ضریب توسعه (بهبود)^۱ و b را ضریب ورود خاکستری^۲ یا پارامتر کنترل خاکستری می نامند [۱۶ و ۲۲] معادله سفید شده دیفرانسیل خاکستری می تواند به وسیله دو مقدار تولید شود:

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b \quad (7)$$

رابطه بین معادله دیفرانسیل خاکستری و معادله سفید شده آن به صورت رابطه های (۸) و (۹) است [۱۲ و ۲۳]:

$$x^{(1)}(k) = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) \approx \frac{dx^{(1)}(t)}{dt} \quad (8)$$

$$z^{(1)}(k) = x^{(1)}(t) \quad (9)$$

به منظور به دست آوردن مقادیر a و b باید دنباله داده های اصلی و مقدار $z^{(1)}(t)$ را در معادله دیفرانسیل خاکستری قرار داد و به این ترتیب $n-1$ معادله خطی به دست می آید [۱۲]. برای تولید $az^{(1)}(n)$ از دنباله $x^{(1)}$ در رابطه (۱۰) محاسبه شده است:

$$z^{(1)} = (z^{(1)}(2), \dots, z^{(1)}(n)) \quad (10)$$

$$z^{(1)}(k) = ax^{(1)}(k) + (1-\alpha)x^{(1)}(k-1), \alpha \in (0,1)$$

محققین معمولاً مقدار α را برابر ۰/۵ در نظر می گیرند و بدین ترتیب دنباله $z^{(1)}$ را می توان دنباله میانگین سری $x^{(1)}$ دانست؛ البته تعیین و به کارگیری مقادیر متفاوتی برای α موضوع تحقیق بسیاری از محققین بوده است و همچنین تعیین مدلی برای دنباله $z^{(1)}$ نیز منجر به ارایه مدل های بهبود یافته خاکستری نیز شده است. چن و چانگ

1- Development coefficient
2- Grey input coefficient

[۱۲] در مقاله خود نشان دادند که:

$$\frac{d x^{(1)}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x^{(1)}(t + \Delta t) - x^{(1)}(t)}{\Delta t} \quad (11)$$

$$\frac{d x^{(1)}}{dt} = x^{(1)}(t+1) - x^{(1)}(t) = x^{(1)}(t+1) \text{ when } \Delta t \rightarrow 1 \quad (12)$$

معادلات خطی را می توان به فرم ماتریسی تبدیل کرد:

$$B \hat{W} = Y$$

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(1)}(2) \\ x^{(1)}(3) \\ \vdots \\ x^{(1)}(n) \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -x^{(1)}(2) & 1 \\ -x^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -x^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{W} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (13)$$

حال با استفاده از روش حداقل مربعات، می توان نوشت:

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (14)$$

با تعیین مقادیر a و b می توان به حل معادله سفید شده رابطه (۱۵) پرداخت:

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b \quad (15)$$

و از حل آن نتایج زیر حاصل می شود:

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = -a \left(x^{(1)}(t) - \frac{b}{a} \right) \quad (16)$$

$$\frac{d \left(x^{(1)}(t) - \frac{b}{a} \right)}{dt} = -a \left(x^{(1)}(t) - \frac{b}{a} \right) \quad (17)$$

حال اگر $x^{(1)}(t) = x^{(1)}(t)$ و $t=1$ باشد، فرمول به شرح رابطه (۱۸) محاسبه می شود:

$$\hat{x}^{(1)}(n+1) = \left(x^{(1)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-n} + \frac{b}{a} \quad (18)$$

همان طور که در روند بالا برای فرمول بندی مدل مشاهده گردید، در این روند به جای استفاده از دنباله اصلی داده ها از دنباله تولید شده توسط اپراتور AGO استفاده می شود؛ بنابراین لازم است که مجدداً اپراتور جدیدی

معرفی گردد. این اپراتور، اپراتور معکوس جمع^۱ است IAGO که با استفاده از اپراتور ذکر شده، می توان نوشت:

$$x^{(0)}(i) = x^{(1)}(i) - x^{(1)}(i-1), \quad x^{(0)}(1) = x^{(1)}(1) \quad (19)$$

حال فرمول پیش بینی مدل $GM(n, m)$ با استفاده از اپراتور ذکر شده، برابر است با:

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-ak} \cdot (1 - e^a) \quad k = 1, 2, \dots \quad (20)$$

۳-۲ مدل چرخشی خاکستری

اساس ساختار مدل چرخشی خاکستری^۲ $RGM(1,1)$ به کارگیری داده های جدیدتر برای محاسبه مقادیر پیش بینی است. تفاوت اصلی این مدل با مدل متداول $GM(1,1)$ جایگزین جدیدترین داده و حذف قدیمی ترین داده و محاسبه مجدد دنباله های مورد نیاز، برای ساخت مدل پیش بینی است [۱۱]. عملکرد این مدل به این صورت است که: با ورود داده جدید، قدیمی ترین داده از دنباله داده ها حذف می شود و به این ترتیب همواره تعداد داده های موجود در دنباله اصلی مدل پیش بینی ثابت می ماند. مثلاً اگر دنباله اولیه متشکل از پنج داده مانند $(x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), x^{(0)}(4), x^{(0)}(5))$ باشد از دنباله قبل برای پیش بینی $x^{(0)}(6)$ استفاده می شود. روند جایگزینی داده ها در دنباله ها تا جایگزینی تمامی داده های دنباله اصلی ادامه می یابد [۲۰ و ۲۴].

۳-۳ مدل خاکستری ورهالست

مدل ورهالست^۳ اولین بار توسط یک زیست شناس آلمانی به همین نام معرفی گردید. هدف اصلی این مدل کاهش توسعه یا پیشرفت مدل در دنیای واقعی است. این تاثیر بر شرح چگونگی افزایش یافتن منحنی مدل است. اگر دنباله اصلی داده ها دارای توزیعی شبیه به منحنی های δ باشد؛ یعنی با گذشت زمان رشد افزایش داده ها به فرم اشباع درآید، به کارگیری این مدل می تواند مفید واقع شود. این مدل نیز بر پایه مدل متداول GM ساخته شده است. بر طبق تئوری خاکستری مدل خاکستری ورهالست به صورت رابطه (۲۱) تعریف شده است [۲۳]:

$$\hat{x}^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b[z^{(1)}(k)]^2 \quad (21)$$

و معادله سفید شده آن به فرم رابطه (۲۲) بیان می شود:

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b[x^{(1)}(t)]^2 \quad (22)$$

که در آن a و b پارامترهای فاصله ای هستند.

پس از محاسبه و جایگذاری پارامترهای a و b ، در نهایت مدل پیش بینی به صورت رابطه (۲۳) معرفی می شود:

1- Inverse accumulated generating operation
2- Rolling $GM(1,1)$ model
3- Verhulst model

$$\hat{x}^{(1)} = \frac{ax^{(1)}(1)}{bx^{(1)}(1) + (a - bx^{(1)}(1))e^{a(k-1)}} \quad (23)$$

پس از اجرای اپراتور IAGO مقدار $\hat{x}^{(1)}(k)$ به صورت رابطه (۲۴) بیان می شود:

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \frac{ax^{(1)}(1)(a - bx^{(1)}(1))}{(bx^{(1)}(1) + (a - bx^{(1)}(1)))e^{a(k-1)}} \times \frac{(1 - e^a)e^{a(k-2)}}{(bx^{(1)}(1) + (a - bx^{(1)}(1)))e^{a(k-2)}} \quad (24)$$

اگر $a < 0$ باشد، می توان نوشت:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{x}^{(1)}(k+1) \rightarrow \frac{a}{b} \quad (25)$$

این بدین معنی است که نقطه اشباع معادله پیش بینی نقطه $\frac{a}{b}$ است. هنگامی که k به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود $\hat{x}^{(1)}(k+1)$ ، $\hat{x}^{(1)}(k)$ بسیار به یکدیگر نزدیک خواهند بود؛ زیرا خصیصه مدل خاکستری ورهالست؛ پیش بینی و تشریح پروسه در ناحیه ها و یا فضاهاى اشباع شده است [۱۶].

۳-۴ مدل NGM(1,1)

مدل $NGM^1(1,1)$ در سال ۲۰۱۲ در مقاله ای توسط ژى و همکاران [۲۵] معرفی شد. آنان هدف از ارایه این مدل را افزایش دقت در پیش بینی ها عنوان کردند و مدل خود را چنین معرفی نمودند. "این مدل، مدلی است برای پیش بینی سری های زمانی در فضای خاکستری، که برای پیش بینی پارامترهای مدل از گروهی از معادلات دیفرانسیل به جای یک معادله دیفرانسیل استفاده می شود. در دنیای واقعی بسیاری از دنباله ها بر پایه قوانین نمایی نیستند" [۲۵]، برای پیش بینی این گروه از داده ها، محققین این مقاله ادعا کردند که مدل ارایه شده توسط آنان مناسب این سری از داده هاست و معادله رابطه (۲۶) را معرف مدل NGM می دانند:

$$x^{(1)}(k) + az^{(1)}(k) = kb \quad (26)$$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول آن به صورت رابطه (۲۷) معرفی می شود و آن را معادله سفیدسازی شده برای مدل NGM می دانند:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = tb \quad (27)$$

دنباله برآورد مجذور مربعات از معادلات دیفرانسیل خاکستری مدل به صورت رابطه (۲۸) بیان می شود:

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (28)$$

از طریق مینیمم سازی مقدار خطا، نیز می توان پارامترهای a و b را برآورد نمود:

$$\varepsilon = Y - B\hat{a}$$

$$S = \varepsilon^T \varepsilon = (Y - B\hat{a})^T (Y - B\hat{a}) = \sum_{k=1}^n (x^{(1)}(k) + az^{(1)}(k) - bk)^2 \quad (29)$$

$$\frac{ds}{da} = 0, \quad \frac{ds}{db} = 0$$

$$a = \frac{\sum_{k=1}^n kz^{(1)}(k) \sum_{k=1}^n kx^{(1)}(k) - \sum_{k=1}^n k^2 \sum_{k=1}^n x^{(1)}(k)z^{(1)}(k)}{\sum_{k=1}^n k^2 \sum_{k=1}^n (z^{(1)}(k))^2 - (\sum_{k=1}^n kz^{(1)}(k))^2} \quad (30)$$

$$b = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2} \left[\sum_{k=1}^n kx^{(1)}(k) + a \sum_{k=1}^n kz^{(1)}(k) \right] \quad (31)$$

حال اگر $x^{(1)}(1) = x^{(1)}(1)$ باشد، فرمول پیش بینی به صورت رابطه (32) ارایه می شود:

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \left(x^{(1)}(1) - \frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} \right) e^{-a(k-1)} + \frac{b}{a}k - \frac{b}{a^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (32)$$

مقادیر $\hat{x}^{(1)}(k)$ از طریق عملکرد اپراتور IAGO قابل محاسبه است.

۴ معیارهای ارزیابی مدل ها

هسو [26] نشان داده که برای مقایسه مدل های پیش بینی باید تکنیک های مورد استفاده در مدل را با یکدیگر مقایسه کرد و باید این مقایسه در سرتاسر داده های پیش بینی شده نیز صورت بگیرد. برای مقایسه دقت مدل های ارایه شده از سه ابزار متداول استفاده می شود.

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(x^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k) \right)^2, \quad MAE = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| x^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k) \right| \quad (33)$$

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{x^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k)}{x^{(1)}(k)} \right| \times 100\%$$

به نقل از سی فنگگ لین [6] لیوایز در سال ۱۹۸۲ و دلیورجیو در سال ۱۹۹۸ برای مقایسه قدرت پیش بینی مدل ها توسط ابزار MAPE و MAE و MSE چهار منطقه را تعیین کردند. اگر این مقادیر کم تر از ۱۰٪ باشد قدرت مدل را در دقت پیش بینی می توان عالی دانست و اگر بین ۱۰٪ تا ۲۰٪ باشد پیش بینی خوبی است و اگر در محدوده ۲۰٪ تا ۵۰٪ باشد قدرت پیش بینی به صورت قابل قبول است و اگر بیش تر از ۵۰٪ باشد، پیش بینی نادقیقی است.

۵ روش اجرای تحقیق

روش تحقیق توصیفی ریاضی است و روش گردآوری اطلاعات کتابخانه‌ای و ابزار گردآوری استفاده از ابزار اسناد و مدارک است. داده‌های استفاده شده در این تحقیق، داده‌های روزانه قیمت نفت اوپک مربوط به دو هفته کاری متوالی است. این داده‌ها از سایت رسمی اوپک^۱ استخراج شده است. از ۱۰ داده اولیه برای مدل‌سازی استفاده شده و از سه داده آخر برای ارزیابی عملکرد مدل‌ها استفاده می‌شود. در مجموع در این تحقیق از ۱۳ داده استفاده شده است.

سری داده‌های مورد استفاده از تاریخ ۲۰۱۲/۲/۶ تا ۲۰۱۲/۲/۱۷ برای مدل‌سازی و از تاریخ ۲۰۱۲/۲/۲۱ تا تاریخ ۲۰۱۲/۲/۲۳ برای ارزیابی عملکرد مدل استفاده شده است. سری داده‌های روند مدل برابر است با:

$$A = \{113/39, 114/68, 115/18, 116/26, 116/41, 117/19, 116/63, 117/94, 118/13, 118/59\}$$

دنباله تست مدل نیز به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$A_T = \{119/19, 120/87, 121/69\}$$

۶ تجزیه و تحلیل داده‌ها

در این قسمت نتایج حاصل از اجرای چهار مدل بیان شده و با توجه به ساختار مدل‌ها، سری پیش‌بینی و سری باقیمانده‌ها از $\hat{X}^{(1)}(2)$ ، $\hat{E}^{(1)}(2)$ شروع می‌شود.

۶-۱ اجرای مدل GM(1,1)

$$a = -0.004003339014 \quad b = 114/2336616$$

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 114/4583396 \times e^{-ka}$$

سری پیش‌بینی مدل به شرح زیر است.

$$\hat{A} = \left\{ \begin{array}{l} 114/9174736, 115/3784493, 115/8412741, 116/3059555, 116/7725009, 117/2409178, \\ 117/7112137, 118/1833962, 118/6523477 \end{array} \right\}$$

معیارهای ارزیابی عملکرد روند مدل عبارت است از:

$$MAE = 0.257777778, \quad MSE = 0.098333333, \quad MAPE = 0.02211799046$$

و دنباله پیش‌بینی $\hat{A}_T$ به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{A}_T = \{119/1334509, 119/6113384, 120/0911429\}$$

معیارهای ارزیابی عملکرد تست مدل عبارت است از:

$$MAE = 0.973333337, MSE = 1/38373333, MAPE = 0.008025328079$$

۲-۶ اجرای مدل چرخشی (۱, ۱)

صادقی [۲۷] در تحقیق خود عملکرد شبکه های عصبی را با مدل ARIMA در پیش بینی کوتاه مدت قیمت سبد نفت خام اوپک مقایسه کرد. در آن تحقیق قیمت نفت خام اوپک را تابعی از قیمت های ۵ روز گذشته عنوان کرد. البته او به مقایسه عملکرد شبکه های عصبی و مدل ARIMA در مدل سازی و پیش بینی کوتاه مدت قیمت سبد نفت خام اوپک پرداخت. نتایج تحقیق او نشان دهنده قدرت شبکه عصبی نسبت به مدل ARIMA است. از این رو برای اجرای مدل چرخشی از مدل چرخشی ۵ روزه استفاده می شود.

$$\begin{aligned}\hat{x}^{(1)}(k+1) &= 114/0.741511 \times e^{-ka}, & \hat{x}^{(1)}(6) &= 117/1986714 \\ \hat{x}^{(1)}(k+1) &= 114/7237192 \times e^{-ka}, & \hat{x}^{(1)}(7) &= 117/8121408 \\ \hat{x}^{(1)}(k+1) &= 116/1513148 \times e^{-ka}, & \hat{x}^{(1)}(8) &= 117/0.951627 \\ \hat{x}^{(1)}(k+1) &= 116/0.374437 \times e^{-ka}, & \hat{x}^{(1)}(9) &= 118/0.542704 \\ \hat{x}^{(1)}(k+1) &= 116/4421955 \times e^{-ka}, & \hat{x}^{(1)}(10) &= 118/509834\end{aligned}$$

معیارهای ارزیابی عملکرد روند مدل عبارت است از:

$$MAE = 0.44, MSE = 0.42588, MAPE = 0.003752131443$$

برای برآورد داده های تست مدل به صورت زیر عمل می شود:

$$\begin{aligned}\hat{x}^{(1)}(k+1) &= 116/8346725 \times e^{-ka}, & \hat{x}^{(1)}(11) &= 119/168657 \\ \hat{x}^{(1)}(k+1) &= 117/418911 \times e^{-ka}, & \hat{x}^{(1)}(12) &= 119/5193459 \\ \hat{x}^{(1)}(k+1) &= 117/0.12749 \times e^{-ka}, & \hat{x}^{(1)}(13) &= 121/4203484\end{aligned}$$

معیارهای ارزیابی عملکرد تست مدل عبارتند از:

$$MAE = 0.5533333333, MSE = 0.6411333333, MAPE = 0.04574066667$$

۳-۶ اجرای مدل ورهالست

برای اجرای مدل برای سری داده ها، پارامترهای مدل به شرح زیر محاسبه می شود.

$$\begin{aligned}a &= -0.3846328821, & b &= -2/689197733 \times 10^{-4} \\ \hat{x}^{(1)}(k+1) &= (-43/6135225) - 0.3049281309 - (0.354140069)e^{ak}\end{aligned}$$

سری داده های پیش بینی مدل عبارت است از:

$$\hat{A} = \left\{ \begin{array}{l} 47/2159211, 63/5304861, 82/5901014, 102/6927937, 120/9480358, 133/3315756, \\ 137/0337336, 130/9478156, 116/7083641 \end{array} \right\}$$

معیارهای ارزیابی عملکرد روند مدل عبارت است از:

$$MAE = 24/4722222, \quad MSE = 1034/98481, \quad MAPE = 0/2112$$

سری تست داده‌های پیش‌بینی عبارت است از:

$$\hat{A}_T = \{97/730375, 77/6552, 59/169682\}$$

معیارهای ارزیابی عملکرد تست مدل عبارت است از:

$$MAE = 42/4033333, \quad MSE = 2079/5003, \quad MAPE = 0/350433333$$

۶-۴ اجرای مدل NGM(1,1)

همان‌طور که اشاره شد اساس این مدل بر پایه دسته معادلات خاکستری است و بر همین مبنا برآوردهای جدیدی برای پارامترهای a و b حاصل می‌شود.

$$0.04574066667$$

$$a = 1/745501174 \quad b = 204/4139457$$

$$\hat{x}^{(1)}(k) = 63/37289369 \times e^{-a(k-1)} + 117/1090279k - 69/09192519$$

سری پیش‌بینی روند داده‌های مدل به شرح زیر بیان می‌شود:

$$0.04574066667$$

$$\hat{A} = \left\{ \begin{array}{l} 64/79834705, 107/9778071, 115/515105, 116/8307967, 117/0604606, 117/1005501, \\ 117/1088621, 117/1074555, 117/1089828 \end{array} \right\}$$

معیارهای ارزیابی عملکرد روند مدل عبارت است از:

$$74066667$$

$$MAE = 6/9144444444, \quad MSE = 282/8843889, \quad MAPE = 0/06013757889$$

سری پیش‌بینی تست داده‌ها نیز به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{A}_T = \{117/10902, 117/1085749, 117/1090272\}$$

معیارهای ارزیابی عملکرد تست مدل عبارت است از:

$$MAE = 3/483333333, \quad MSE = 13/21636667, \quad MAPE = 0/02881478333$$

۶-۵ نتایج عملکرد مدل ها

در مدل $RGM(1,1)$ مقادیر $MAPE$ و MAE ، کم تر از ۱۰٪ است و قدرت مدل را در دقت پیش بینی می توان عالی دانست و در مدل $GM(1,1)$ مقادیر $MAPE$ و MAE کم تر از ۱۰٪ است و MSE بین ۱۰٪ تا ۲۰٪ است؛ بنابراین این مدل پیش بینی خوبی است، ولی در مدل $NGM(1,1)$ و مدل ورهالست در محدوده قدرت پیش بینی تا حدودی قابل قبول و نادقیق قرار می گیرد؛ بنابراین از مدل های آزمون شده، مدل چرخشی خاکستری $RGM(1,1)$ و مدل $GM(1,1)$ نتایج بهتری را نشان می دهند و مدل خاکستری ورهالست و مدل $NGM(1,1)$ برای پیش بینی قیمت نفت با این سری از داده ها مناسب نیستند. علت آن را می توان در ساختار این مدل ها دانست.

۷ نتیجه گیری

با توجه به رشد سریع تکنولوژی و جهانی شدن بازارهای مالی و اهمیت استراتژیک کالایی مانند نفت، نیاز به پیش بینی دقیق و کارای قیمت نفت چندین برابر شده است. همچنین تغییرات سریع و اثرگذار محیط های اقتصادی، سیاسی و اجتماعی در کشورهای تولیدکننده و مصرف کننده نفت، پیش بینی کنندگان را از نظر تامین داده های لازم برای حصول نتایجی دقیق و کارا دچار مشکل کرده است، از این رو محققان بر آن شده اند که به دنبال مدلهایی برای پیش بینی باشند که به تعداد داده های کم تری نیاز داشته باشند. یکی از این مدل های پیش بینی که امروزه کاربرد گسترده تری در محیط های علمی بین رشته ای دارد، مدل های خاکستری است.

در این تحقیق برای پیش بینی قیمت نفت خام اوپک از مدل های خاکستری استفاده شده و برای مقایسه عملکرد این مدل ها از ابزارهای متداول این کار، یعنی MAE ، MSE و $MAPE$ استفاده شده است. نتایج حاصله حاکی از آن است که از مدل های موجود مدل چرخشی خاکستری $RGM(1,1)$ و مدل $GM(1,1)$ نتایج بهتری را نشان می دهند و مدل خاکستری ورهالست و مدل $NGM(1,1)$ برای پیش بینی قیمت نفت با این سری از داده ها مناسب نیستند و علت آن را می توان در ساختار این مدل ها دانست.

محققان در تحقیقات آینده می توانند به بررسی این موضوع بپردازند که آیا برای پیش بینی قیمت ها در بازارهای مالی استفاده از مدل های ۲ متغیر $GM(2,1)$ و یا مدل های $GM(1,2)$ مناسب تر است. محققان با توجه به پیشینه علمی خود می توانند نتایج حاصل از پیش بینی با مدل های خاکستری را با نتایج حاصل از سایر روش های پیش بینی سری های زمانی مانند خانواده $ARIMA$ و یا شبکه های عصبی و یا به طور کلی روش های خانواده هوش مصنوعی مورد مقایسه قرار دهند.

از آنجا که استفاده از کلیه سیستم های خاکستری در ایران به تازگی مورد استقبال قرار گرفته و با توجه به اینکه پیش بینی خاکستری را می توان هسته مرکزی تئوری سیستم های خاکستری دانست، محققان می توانند سایر مسایل اقتصادی مثلاً میزان تولید نفت را برای بازارهای نفتی و یا میزان مصرف انرژی مانند گاز، برق، بنزین و یا گازوئیل پیش بینی نمایند.

منابع

- [۱] حافظی، ر.، شهرابی، ج.، هداوندی، الف.، (۱۳۹۲). توسعه مدلی ترکیبی هوشمند برای پیش‌بینی بازار سهام تهران. مجله تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۰(۲)، ۳۵-۴۹.
- [۲۷] صادقی، ح.، ذولفقاری، م.، الهامی نژاد، م.، (۱۳۹۰). مقایسه عملکرد شبکه‌های عصبی و مدل ARIMA در مدل سازی و پیش‌بینی کوتاه مدت قیمت سبب نفت خام اوپک (با تاکید بر انتظارات تطبیقی). نشریه مطالعات اقتصاد انرژی، ۸(۲۸)، ۴۷-۲۵.
- [2] Hussain, A. J., Knowles, A., Lisboa, P. J. G., El-Dereby, W., (2008). Financial time series prediction using polynomial pipelined neural networks. *Expert Systems with Application*, 35, 1186-1199.
- [3] Guo-Dong, L., Daisuke, Y., Masatake N., (2006). A GM(1, 1)- Markov chain combined model with an application to predict the number of Chinese international airlines. *Technological Forecasting & Social change*.
- [4] Lin, N., Sifeng, L., (1999). Several Programming Models with Unascertained Parameters and their Applications. *J. Multi-Crit, Decis. Anal.*, 8, 206-220
- [5] Deng, J. L., (1989). Introduction to Grey System Theory. *Journal of Grey system*, 1(1), 1-24.
- [6] SifengLin, Y., (2006). *Grey Information Theory and Practical Applications*. Springer-Verlag London Limited.
- [7] Wang, Z. L., Liu, S. F., (2005). Extension of grey superiority analysis. *IEE Trans. System, Man Cybern. Conf.*, 1, 616-621.
- [8] Wang, C. H., (2004). Predicting tourism demand using fuzzy time series and hybrid grey theory. *Tourism Management*, 367-374.
- [9] Deng, J. L., (1985). Special issue of grey system approach. *Fuzzy math*, 5(2).
- [10] Lin, Y. H., Chin-chiang, C., Pin-chan, L., Yong-Jun, L., (2012). Applying fuzzy grey modification model on inflow forecasting. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 25, 734-743.
- [11] Trung, D. Q., Ahn, K. K., (2012). Wave prediction based on a modeling grey model MGM(1, 1) for real-time control of wave energy converters in irregular wave. *Renewable Energy*, 34, 242-255.
- [12] LinChiao, M., et al., (2012). A novel dynamic progress forecasting approach for construction projects. *Expert Systems with Application*, 39, 2247-2255.
- [13] Wang, S. W., Wang, C. T., Huang, S. C., (2011). Improving inventory effectiveness in RFID-enabled global supply chain with Grey forecasting model. *Journal of Strategic information systems*, 20, 307-322.
- [14] Tsung-Sheng C., (2013). Grey theory analysis of on line population and online game industry revenue in Taiwan", *Technological Forecasting & Social Change*, 80, 175-185.
- [15] Mu-Shang Y., Hui-wen V. T., (2013). On the fit and forecasting performance of grey predication models for china labor formation", *Mathematical and computer Modeling*, 57, 357-365
- [16] Kayacan, E., Baris. U., Okyay, K., (2010). Grey system theory-based model in time series prediction. *Expert systems with applications*, 37, 1784-1789.
- [17] Liu, S. F., Dang, Y. G., Fang, Z. G., (2004). *Grey system Theory and its application*. Third ed., science press, Beijing, (chapter 5)
- [18] Lin, Y. H., Pin-chan, L., Ta-Peng, C., (2009). Adaptive and high-precision grey forecasting model. *Expert systems with applications*, 36, 9658-9662.
- [19] Shang, L., (2012). Forecasting agricultural output with an improved grey forecasting model based on the genetic algorithm. *Computers and Electronics in agriculture*, 85, 33-39.
- [20] Wen, K. L., (2009). *Grey system theory and applications*, Wunan Publisher, Taipei.
- [21] Hui-Wen V. T., Mu-Shang Y., (2012). Forecasting performance of grey prediction for education expenditure and school enrollment", *Economic of Education Review*, 31, 452-462.
- [22] Wang, J., Suling, Z., Weigangzhao, W., (2011). Optimal parameters estimation and input subset for grey model based on chaotic particle swarm optimization algorithm. *Expert system with Applications*, 38, 8151-8158
- [23] Xu, J., Tao, T., Mao, T., long Q. I., (2011). Improvement of grey models by least squares", *Expert systems with Applications*, 38, 13961-13966.
- [24] Kung, L. M., Yu, S. W., (2008). Prediction of index futures returns and analysis of financial spillovers- a comparison between GARCH and the grey theorem. *European Journal of operational research*, 186, 1184-1200.
- [25] Jie, C., Si-feng L., Bo Z., Nai-ming X., (2012). A novel grey forecasting model and its optimization", *Applied Mathematical Modeling*, No. 45, pp 234-256.
- [26] Hsu, L. C., (2011). Using improved grey forecasting models to forecast the output to opto-electronics industry. *Expert systems with applications*, 38, 13879-13885.